Canete del Pinar, Conde de
Observaciones de Precision con el Sextante


Digitized by Google

From the author to the Observatory.
Febr. 28, 1901

ALGO MÁS SOBRE

OBSERVACIONES DE PRECISIÓN

CON EL

SEXTANTE

POR EL

CONDE DE CAÑETE DEL PINAR

CAPITÁN DE FRAGATA RETIRADO



MADRID
AÑO DE 1900

ALGO MÁS SOBRE OBSERVACIONES DE PRECISIÓN

CON EL

SEXTANTE

ALGO MÁS SOBRE

OBSERVACIONES DE PRECISIÓN

CON EL

SEXTANTE

POR EL

CONDE DE CAÑETE DEL PINAR

CAPITÁN DE FRAGATA RETIRADO



MADRID
IMPRENTA DEL DEPÓSITO HIDROGRÁFICO
56, Alcalá, 56.

1900

INTRODUCCION

En el año 1895 publiqué una Memoria sobre *Observaciones de precisión con el sextante*, que la REVISTA GENERAL DE MARINA tuvo la bondad de acoger, insertándola en sus números de Julio, Agosto, Septiembre y Octubre de aquel año, así como el Depósito Hidrográfico en sus *Anales*. En ella, después de haber hecho la apología del instrumento, presentándolo, por primera vez, como propio y adecuado para observaciones de gran precisión, lo comparaba con otros instrumentos astronómicos y concluía haciendo las siguientes consideraciones:

«Sólo el sextante con su alidada fija no introduce en los cálculos más error que el de observación, común á todos los instrumentos (aunque mayor en él); y los superaría ciertamente en precisión, si las circunstancias que intervienen en la magnitud de este error fueran idénticas para todos, esto es, si el anteojo del sextante fuera tan potente como el de los otros instrumentos astronómicos. Y cuando tales circunstancias fueran idénticas, los errores de observación al medir alturas iguales serían todavía menores en el sextante, ó menor su influjo que en el instrumento altazimutal, por *ser dobles las alturas* que el primero mide.»

»Destinado el instrumento de reflexión principalmente á funcionar en la mano del navegante para la práctica del pilotaje, sus dimensiones por necesidad son reducidas y no permiten anteojo de mayor poder; pero no parece imposible la

construcción de otro instrumento, dedicado exclusivamente á observaciones en tierra, en el que, sin aquella limitación de tamaño y peso, y aun con distinta construcción y forma, se aunen el poder de los grandes anteojos astronómicos y los fecundos principios de los sectores de reflexión y horizonte artificial; y parece que tal instrumento presentaría ventajas de exactitud, con ancho campo para las observaciones, al hacer posibles las de estrellas de magnitud pequeña, y sería, por lo tanto, de utilísima y frecuente aplicación en la astronomía y geodesia.»

En el año siguiente de 1896, para comprobar con resultados prácticos algunas de las afirmaciones hechas en la citada Memoria, publiqué en la misma REVISTA GENERAL DE MARINA un artículo con el título de «Numerosas determinaciones de latitud, etc.», en el que daba cuenta de 102 nuevas determinaciones de latitud, practicadas después de la publicación de la Memoria, por el método más sencillo y práctico de los expuestos en ella; las cuales, por su conformidad entre sí, corroboraban todo lo dicho sobre la precisión de esta clase de observaciones. Al final de este artículo agregué lo siguiente:

«En la actualidad los fabricantes Sres. T. Cooke & Sons, de York, me están construyendo un sextante tal como dejé indicado al final de mi Memoria citada, esto es, de anteojo de mucho mayor poder, con el cual espero conseguir errores de observación mucho más pequeños; y como además serán posibles con él las observaciones de estrellas de 3.ª, 4.ª y 5.ª magnitud, habrá gran abundancia de pares de estrellas adecuados para cada caso, lo que facilitará el poder disminuir en gran escala y á voluntad los efectos, en los promedios, de los errores de las declinaciones. De esta manera espero que, en pocas noches de observación, con gran facilidad y sin gastos, se ha de conseguir una latitud de tanta precisión como la que se alcance con los grandes instrumentos astronómicos, cuyo transporte y manejo presenta serias dificultades y exige grandes requisitos.»

»En su día me propongo publicar los resultados qu› con tal instrumento obtenga y describir sus detalles y modo de manejarlo, por si hay alguien que siga con interés el curso de estos ensayos.»

Ya es llegado ese día, porque el nuevo instrumento está á mi disposición desde hace algún tiempo, y he observado con él lo suficiente para poder hablar de sus cualidades como de cosa conocida y estudiada á fondo.

Aunque el poder de su anteojo sea mucho mayor que el usual en los sextantes comunes, todavía es bastante inferior á los que se emplean en los más modestos instrumentos altazimutales ó zenitales; así que aun queda ancho campo para mejorar sus condiciones en nuevos ensayos que puedan hacerse en lo sucesivo. Con el presente, según podrá verse más adelante, se ha obtenido tal grado de precisión, que no parece necesario acrecentarlo, mientras no aumente el de las declinaciones de estrellas que dan los catálogos actuales.

La práctica de las observaciones que he llevado á cabo con el nuevo instrumento, ha confirmado plenamente todo lo que de él esperaba al idearlo, tanto sobre ventajas de precisión en los resultados numéricos con respecto al uso de los sextantes comunes, como sobre el considerable aumento del número de estrellas susceptibles de ser observadas y la superior claridad de sus imágenes en el campo del anteojo, así como la de los hilos del retículo, que facilitan y hacen más grata la tarea de la observación. Por otro lado, el nuevo sextante presenta menos dificultades para su manejo que el sextante común, tan pronto como se adquiere alguna familiaridad con él; y puede ser considerado como portátil y manuable, porque se separa fácilmente de su pie, el cual á su vez se subdivide en varias piezas independientes, para hacer más cómodo su transporte de un punto á otro. Con tales cualidades y circunstancias, se presenta como *instrumento sin rival* para la parte astronómica de los trabajos geodésicos, haciendo factible á poca costa el bello ideal de la determinación de latitud astronómica en todos los vértices de una

triangulación de primer orden, y aun quizás la de diferencia en longitud astronómica entre todos ellos, por ser igualmente apto para determinar con gran exactitud la hora de cada lugar. De esta manera, si llegara á generalizarse, podría contribuir poderosamente á la difícil y muy costosa averiguación de los diversos *desvíos de la plomada* en toda la extensión de un gran territorio, la cual hoy, á pesar de su gran importancia, deja de hacerse en la mayoría de los casos, por ser faena harto ardua y dispendiosa. Y finalmente, por estos y otros medios podría ayudar eficazmente á la solución del eterno, interesante y universal problema sobre la determinación de la figura y dimensiones del globo en que habitamos, recabando para ello preciosos y abundantes datos de muy alta precisión, con importantes ventajas de facilidad, prontitud y economía sobre todos los instrumentos conocidos.

Puede tener además, como instrumento de observatorio, todas las aplicaciones que tiene el *Almucantar* de Chandler, que viene á ser un instrumento de paso por determinado almicantarat; y lo mismo es el nuevo sextante cuando se aplica, con la alidada fija, á observar las horas en que distintos astros alcanzan la altura que en aquella posición de alidada, espejos y anteojo mide el instrumento.

Entre las aplicaciones que da Chandler al suyo, está la determinación de ascensiones rectas y declinaciones de las estrellas; y afirma que en tal tarea aventaja al instrumento meridiano. El nuevo sextante aventaja teóricamente al *Almucantar* de Chandler en que aquél mide las alturas dobles, mientras éste las mide sencillas; por consiguiente, el error de vista en la verdadera magnitud de la altura debe influir para el primero la mitad que para el segundo en igualdad de circunstancias, bien entendido que una de estas circunstancias es el poder del anteojo.

Los resultados que he obtenido de las experiencias á que he sometido el nuevo sextante, notables, como ya he indicado, por su extremada precisión, me imponen la obligación de dar á conocer el instrumento, sus cualidades, su manejo,

algo diferente del que se emplea con los sextantes comunes, y su comportamiento brillante en esta clase de observaciones. Y con este motivo, también será oportuno recordar aquí algunos de los métodos que más se prestan á obtener resultados precisos de tales observaciones, especialmente aquellos que las recientes prácticas han acreditado como más útiles, adecuados y cómodos.

CAPÍTULO PRIMERO

DESCRIPCIÓN DEL NUEVO SEXTANTE

Con los sextantes corrientes se puede llegar, por medio de las observaciones llamadas *de precisión* y de los métodos expuestos en la Memoria citada, á resultados de tan extraordinaria exactitud, que maravilla cuando se la relaciona con la pequeñez y relativa tosquedad del instrumento empleado. Pero esta misma pequeñez y corto peso, condiciones indispensables para el uso más frecuente del sextante, cual es la práctica del pilotaje, ha obligado siempre á dotarlos con anteojos de escasa amplificación, por su reducido tamaño, é incapaces, por lo tanto, de hacer sensible para la vista del observador una variación menor de 15″ en el ángulo medido.

Es evidente que si se midiera el mismo ángulo con un sextante cuyo anteojo tuviera una amplificación n veces mayor, se apreciarían variaciones en el ángulo medido n veces menores que aquel límite de 15″ más arriba señalado; y disminuyendo así en gran escala tal causa de error, podría aspirarse en las aplicaciones de los mismos métodos á un grado de precisión todavía bastante mayor que el ya halagüeño obtenido con los sextantes corrientes.

Esto sugirió la idea de construir un instrumento de reflexión propio para observar en tierra, con pie y horizonte artificial, una misma altura doble en varios astros, y dotado de anteojo cuya amplificación fuera diez veces mayor que la corriente en los buenos sextantes comunes, con la aspiración

de alcanzar por su medio resultados, cuyo error probable quedara muy por bajo del que se suele obtener con aquellos instrumentos, aunque nunca tanto como su décima parte, pues existen otras distintas causas de error, cuya influencia en los resultados permanece íntegra, por ser independientes de la mayor ó menor amplificación del anteojo.

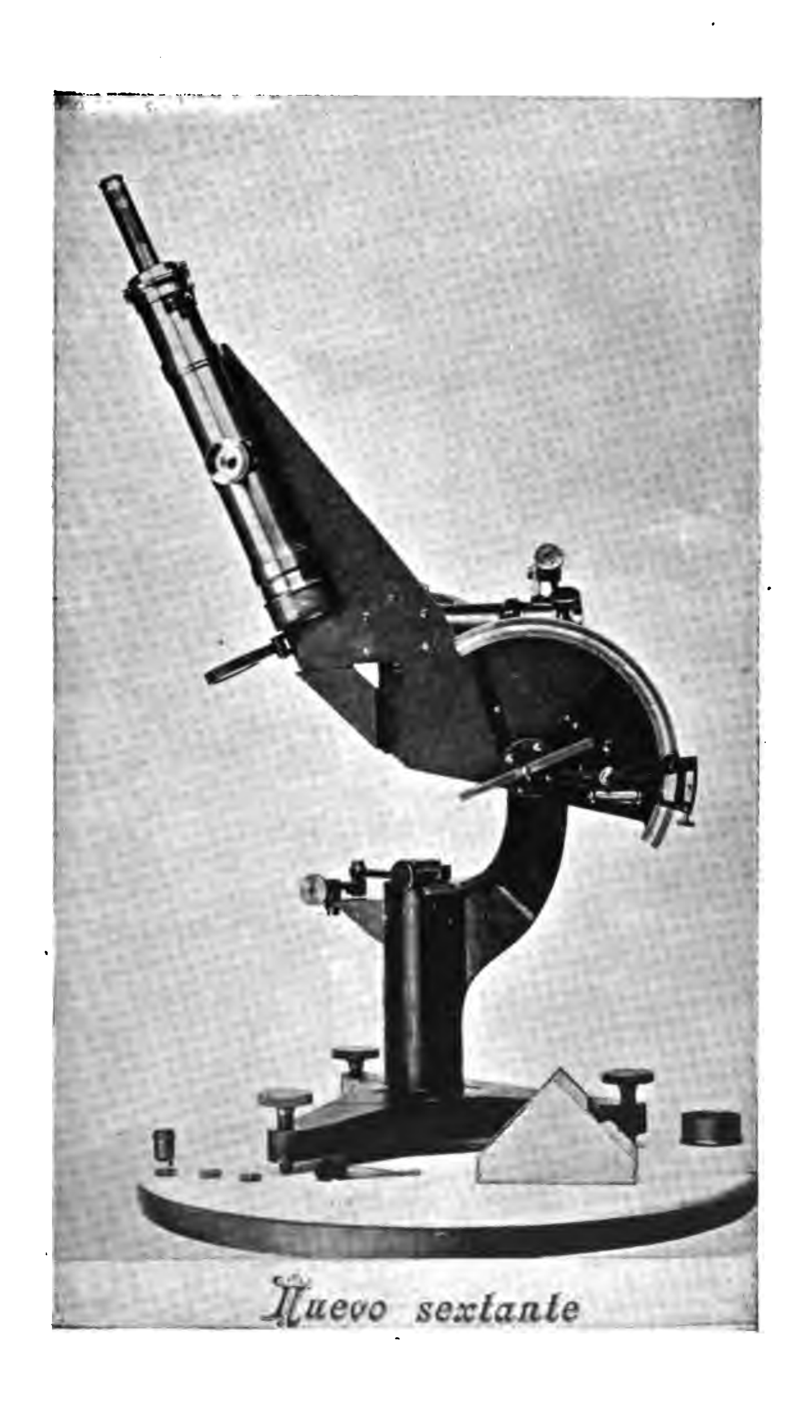
Ya en la vía de plantear esta mejora de aumento de poder óptico en el anteojo, se procedió á estudiar cuáles habían de ser las variaciones que convendría adoptar en los demás elementos del sextante en proyecto, para cooperar al fin propuesto.

En primer lugar, el aumento de dimensiones en el anteojo obliga á aumentar proporcionalmente los espejos del instrumento, ó bien el espejo y prisma, cuando se trata de instrumentos de reflexión del sistema de Pistor & Martins, que fué el tipo preferido desde luego, por sus incontestables ventajas. En cambio, otras partes del instrumento, como son el limbo con su arco graduado y la alidada, pueden conservar sus antiguas dimensiones; y no hay interés alguno en aumentarlas, puesto que la lectura de la gradución jamás ha de utilizarse para los cálculos en esta clase de observaciones, y basta que sea aproximada para su papel secundario de facilitar los preparativos de la observación.

La trabazón entre las distintas piezas del instrumento convendría que fuera absolutamente inalterable, para que ni sus posiciones relativas, ni el plano ideal que determinan, generalmente conocido con el nombre de *plano del instrumento*, pudieran experimentar nunca la menor variación en el intervalo de una observación á otra, estando fija la alidada. Para aproximarse á este *desideratum* convenía sustituir la trabazón ligera y en esqueleto, tan adecuada á los instrumentos de reflexión usuales, por otra más sólida, maciza é invariable. Por igual razón el anteojo, que en los sextantes comunes va unido al instrumento por un aro de imperfecto ajuste, convendría ahora sujetarlo por dos abrazaderas perfectamente ajustadas al instrumento y al anteojo, y coloca-

das hacia los extremos del último, de modo que aseguren la invariable posición del eje óptico con respecto al plano del instrumento.

Como consecuencia de todos estos aumentos de solidez y de dimensiones en distintas partes del instrumento, había que proyectar un incremento proporcional en cada una de las partes del pie necesario para soportarlo. Sabido es que la columna vertical del pie, en el sistema de los instrumentos de reflexión de Pistor & Martins, tiene una parte curva en forma de herradura, con el objeto de que el plano del instrumento pueda tomar todas las orientaciones posibles en el espacio, y de que en cada una de estas orientaciones sean posibles tanto la colocación natural, que es cuando la alidada se dirige al lado opuesto del ángulo medido, como la colocación invertida, que es cuando la alidada se dirige hacia la bisección de dicho ángulo, la primera para medir los ángulos menores de 130°, la segunda para medir los comprendidos entre 130° y 180°. Destinado el nuevo instrumento exclusivamente á observación de alturas de astros sobre el horizonte artificial, quedan excluídas todas las orientaciones del plano del instrumento que no sean las verticales; y no será ya necesario dar relativamente tanta amplitud á la herradura de la columna vertical, puesto que nunca será indispensable pasar el instrumento por su interior, al girarlo en torno del eje paralelo al plano del instrumento. Bastará que este brazo curvo tenga la anchura suficiente para que pase con holgura el cilindro de plomo, que, como contrapeso del instrumento, gravita sobre el extremo opuesto del eje perpendicular á su plano. Con esto hay lo suficiente para el cambio desde la posición natural del instrumento, que es cuando se coloca vertical su plano y con el contrapeso á la derecha del observador, á la posición invertida, que es con el contrapeso á la izquierda y el plano del instrumento siempre vertical. En rigor, la columna vertical del pie podría ser cilíndrica, sin herradura alguna, y entonces se practicaría la inversión antedicha con un giro de 180° alrededor del eje vertical y otro



Nuevo sextante

alrededor del eje normal al plano del instrumento hasta donde fuere necesario; pero como esta disposición alejaría demasiado de las manos del observador, en algunos de estos giros, los tornillos del movimiento lento, de que más adelante se hablará, se optó por la herradura relativamente disminuída en la columna vertical.

Sabido es que son tres los ejes de rotación que tiene el pie del instrumento, alrededor de los cuales se verifican los tres movimientos giratorios que exige la observación; y ya en el párrafo anterior ha sido necesario aludir á todos tres. Uno de ellos es vertical, el segundo horizontal y paralelo al plano del instrumento, y el tercero perpendicular al plano del instrumento, y por consiguiente, también horizontal para las observaciones de precisión. En los sextantes comunes, los movimientos giratorios alrededor de estos ejes se dan todos á mano; pero el sextante en proyecto, por su mayor tamaño, peso y afinación en las observaciones, reclamaba *movimientos lentos* para perfeccionar la observación, esto es, mordazas y tornillos de ajuste en los tres ejes, para practicar, mediante ellos, con tino y con éxito, las sutiles variaciones necesarias en los momentos que preceden al de la observación.

Además de los dos niveles normales al plano del instrumento, que ya se usaban en los sextantes de este sistema de Pistor & Martins, debía adoptarse ahora otro tercer nivel propuesto hace tiempo por el profesor Knorre, de Rusia *(Astronomischen Nachrichten*, vol. VII, p. 262), el cual, colocado de firme sobre la alidada, paralelamente al plano del instrumento y en dirección tal, que marque la horizontalidad cuando la alidada esté en cero y el eje óptico del anteojo esté horizontal, había de facilitar extraordinariamente las observaciones, porque siempre que el plano del instrumento se coloque después en el vertical de un astro, la alidada se ponga en la graduación indicada por el duplo de su altura aparente según cálculo, el horizonte artificial se sitúe en lugar adecuado y el instrumento se gire alrededor del eje perpendicular á su plano



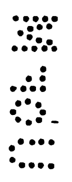
hasta tanto que el nivel de Knorre marque la horizontalidad, aparecerán en el campo del anteojo las dos imágenes del astro algunos momentos antes de que éste llegue á la altura indicada, una por la parte alta del campo y otra por la baja; se las verá aproximarse hasta que lleguen á confundirse, que es el momento de la observación, y continuarán después su camino separándose. Con lo dicho se hace evidente cuán valiosa ayuda prestará este nivel para la observación, evitando la angustiosa tarea de buscar las imágenes á tanteo, faena ya muy difícil con los sextantes comunes y que probablemente resultaría sin éxito con el nuevo en la mayoría de los casos. Además se evita el peligro de tomar como segunda imagen, equivocadamente, la de otra estrella de parecido brillo.

Con arreglo á todas las consideraciones que quedan mencionadas se formó el plan del nuevo instrumento, y se encargó su construcción en 1896 á los señores T. Cooke & Sons, de York, haciéndoles las indicaciones que parecieron oportunas. Más de un año duró la construcción, y tuvo después que volver el instrumento á York para corregir algún defecto procedente de una mala inteligencia. En el otoño de 1898 ya pude hacer algunas observaciones, y después me he familiarizado mucho con el nuevo instrumento en 1899 y en el presente año de 1900.

Montado en su pie es tal como aparece en la Fig. I. El anteojo está firmemente adherido al cuerpo del instrumento por dos fuertes abrazaderas de bronce perfectamente ajustadas. Su objetivo tiene 49 milímetros de diámetro y 400 de distancia focal; y se mueve por medio del tornillo lateral que muestra la figura, con el objeto de arreglar el foco. En éste lleva un retículo de hilos de araña formado por 4 verticales y 2 horizontales, todos próximamente equidistantes. En *L* tiene una pequeñísima luz eléctrica, guarnecida con pantalla á un lado, y que puede girar, á voluntad del observador, alrededor de un eje perpendicular al óptico del anteojo, con el objeto de iluminar, ya el campo, dejando el retículo oscuro, ya el retículo, dejando el campo oscuro, según convenga



Fig. I.



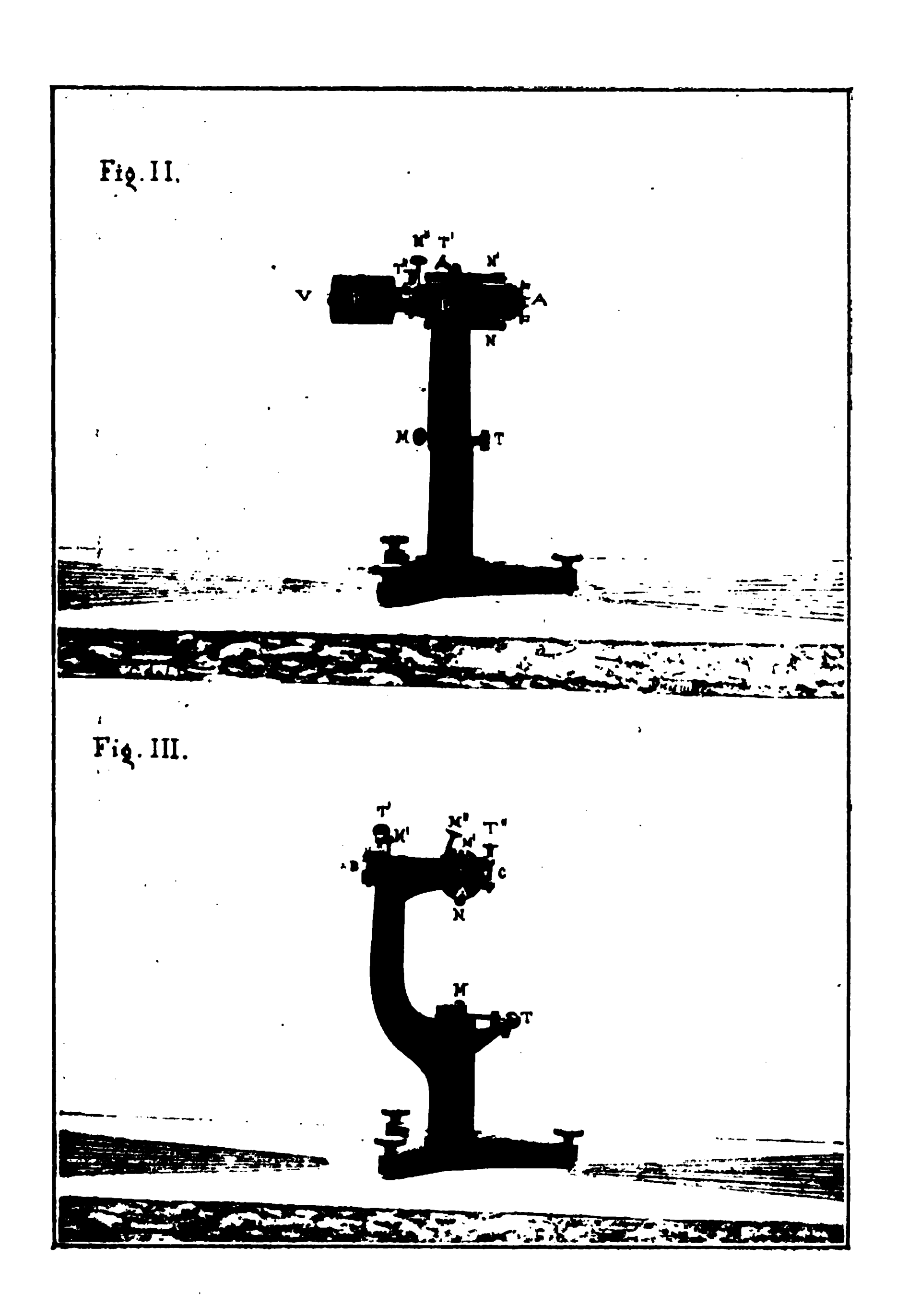


Fig. II.

Fig. III.

para la mayor claridad de la observación. Tiene el anteojo dos oculares, uno de amplificación 14 y otro de 75. Este último es el que siempre se ha usado para las observaciones de precisión. También está provisto de vidrios de color para interponerlos entre el objetivo y el prisma P, y otros para colocarlos, cuando convenga, delante del ocular. El prisma tiene 40 milímetros de altura y por base un triángulo rectángulo isósceles, cuya hipotenusa es de 122 milímetros: el espejo grande ó central es de 150 de largo por 43 de ancho: el arco graduado tiene las dimensiones corrientes; su radio es de 150 milímetros, y sobre la alidada, en N, lleva ajustado el nivel de Knorre, del que se ha hecho mención anteriormente.

Las distintas piezas del instrumento van ligadas entre sí por maciza plancha de bronce de 5 milímetros de grueso, reforzada en su cara posterior por sendos nervios del mismo metal y de igual grueso, normales á la plancha y de 20 á 30 milímetros de anchura. El centro de gravedad de este conjunto se encuentra en A, y allí la cara posterior está dispuesta para poder adaptarse al disco y pezón en que termina uno de los ejes del pie, mediante los seis tornillos que se ven en dicho disco. (Véase A en las Figs. II y III.)

La Fig. II representa el pie en cierta posición y la Fig. III el mismo, después de un giro de 90° alrededor del eje vertical. El pie tiene una sólida base de hierro fundido, sostenida por tres tornillo-pies que sirven para nivelar el instrumento. En la parte superior del eje vertical, que está firmemente unido á la base, actúa la mordaza M, y todo lo restante del pie gira en derredor de dicho eje, á mano cuando la mordaza no funciona, ó lentamente por medio del tornillo T cuando la mordaza está ajustada.

La mordaza M' y el tornillo T' juegan un papel idéntico respecto al eje horizontal $B\,C$: y lo mismo la mordaza M'' y el tornillo T'' respecto al eje $V\,A$ perpendicular al plano del instrumento. Este último eje, que soporta en su extremo A el sextante, lleva en el otro extremo V un contrapeso P, y gira dentro de un tubo íntimamente ligado al eje $B\,C$. Este tubo

sustenta dos niveles en el sentido de su longitud, uno N' encima, que actúa para la posición natural del instrumento, y otro N debajo para la posición invertida, que es con el contrapeso á la izquierda del observador. Por medio de uno de estos niveles y de los tres tornillo-pies se nivela el instrumento, hasta conseguir que el nivel marque una misma lectura en todas las rotaciones posibles alrededor del eje vertical, con lo que se consigue la perfecta verticalidad de dicho eje. Los niveles vienen preparados para corregir fácilmente sus posiciones, según convenga.

Para graduar la intensidad de luz de las dos imágenes del astro observado, se mueve el prisma del instrumento á voluntad del observador, y en sentido perpendicular á su plano, por medio de un tornillo de gran diámetro colocado detrás.

Se había pensado en construir también un horizonte artificial que fuera cuatro veces mayor en superficie que los usuales en los sextantes comunes; pero se tropezó con la dificultad de encontrar cristales planos de caras paralelas y del tamaño exigido. Como después, en la práctica del nuevo sextante con un horizonte artificial pequeño, el propio de un sextante corriente de Troughton, se ha encontrado este horizonte artificial suficiente para llevar á cabo todas las observaciones, sin que ocurriera motivo para sentir jamás la falta de otro mayor, se desistió por completo del proyecto de construirlo.

CAPÍTULO II

MANEJO DEL INSTRUMENTO

Si el lugar destinado á la observación no tiene un piso perfectamente horizontal, conviene hacérselo, aunque sea reducido á pequeñas dimensiones. Yo he acostumbrado hacer una excavación poco profunda, de 2 á 3 metros de longitud en el sentido de la meridiana y de un metro de ancho: he rellenado esta excavación con mampostería hasta cerca de la superficie del contorno, y después la he cubierto con una torta de cemento cuya capa superior quede próximamente á la altura del piso que la rodea y lo más perfectamente horizontal posible. Después de determinar el centro de este rectángulo, he trazado sobre su superficie, á cincel, las rectas que van de dicho centro á los cuatro puntos cardinales, y de cinco en cinco grados las líneas azimutales que conceptuaba convenientes para las observaciones que me proponía hacer, ennegreciéndolas con tinta ó alquitrán mineral para verlas con mayor distinción durante la noche. Con radio conveniente he trazado una pequeña circunferencia alrededor del centro del rectángulo, y en ella he cincelado, de treinta en treinta grados, doce pequeños conos invertidos de base igual á la de cada tornillo-pie, de tal modo que, al reposar los tres tornillo-pies dentro de tres de estas pequeñas excavaciones, distantes 120° entre sí, la prolongación del eje vertical del instrumento pasa siempre por el centro del rectángulo, cualesquiera que sean las excavaciones escogidas. Son tantas,

porque el instrumento tiene el defecto de que la proyección horizontal del eje óptico del anteojo cae dentro de un círculo circunscrito á los tres tornillo-pies y exige, por consiguiente, en alguna observación, que el horizonte artificial se coloque en el lugar ocupado por uno de estos tornillos; inconveniente que suele evitarse eligiendo otras tres de las doce pequeñas excavaciones para lugares de los tornillo-pies.

Conviene asegurarse de la buena colocación de los niveles. Para ello, una vez instalado el pie en la posición antedicha y atornillado el sextante, se coloca el plano del instrumento en el vertical del sol, y, mediante el horizonte artificial y el movimiento de la alidada, se traen á coincidencia las dos imágenes en el centro del campo del anteojo, usando el ocular de menor amplificación para facilitar más estos preparativos. Conseguido esto, se examina el nivel N' (Fig. II), y si no marca la horizontalidad, se le obliga á marcarla por medio de sus tornillos. Lo mismo se hace con el nivel de Knorre que está sobre la alidada, y una vez hechas estas rectificaciones, ya serán siempre estos dos niveles guías seguros para conseguir la aparición de las dos imágenes de un astro dentro del campo del anteojo, con tal de que la alidada esté en la graduación debida y el plano del instrumento en el vertical del astro. Si después se invierte el instrumento, el nivel N vendrá á la parte superior y se rectificará su colocación en la misma forma con que se practicó la del N'; y si el sol no alcanzara suficiente altura para ello, se podrá hacer de noche con una estrella de buena magnitud.

Entre las muchas ventajas del sextante sobre otros instrumentos astronómicos para observaciones de precisión, puede contarse como esencial la de no requerir, como ellos, un estudio minucioso, prolijo, cansado y á veces abrumador de todos los accesorios del instrumento, de la influencia de cada una de sus partes y de todos los errores que existan ó que puedan originarse. Semanas, meses y hasta años exige algunas veces este estudio en un solo instrumento; volúmenes enteros obliga en ocasiones á escribir: ya se trata, grado por

grado, de la averiguación de los errores en toda una graduación; ya de la valoración de las distancias interfilares ó de una rotación en cada tornillo micrométrico, ó de una división en la escala de cada nivel; ya es la determinación de otros errores, y nunca se acaba... todavía habrá que volver diariamente á nuevas evaluaciones de errores. El que haya tenido que hacer el estudio de un instrumento astronómico nuevo, hasta tenerlo en disposición de sacar de él el mejor partido, podrá estimar en todo su valor la inapreciable cualidad del sextante, que, sin estudio previo de sus defectos, sin conocimiento alguno de sus errores y sin más preparación que la insignificante mencionada, puede aplicarse inmediatamente á las *observaciones de precisión*, con la seguridad de obtener brillantes resultados. Que los errores instrumentales sean muchos ó pocos, grandes ó pequeños, conocidos ó ignorados, nada importa, pues no pueden malear ni pervertir los resultados de la observación.

Los útiles necesarios que se deben tener á mano para la observación (Fig. I), son el horizonte artificial *H*, un farol *F* para iluminar el cronómetro, una pila *R* para alimentar la luz eléctrica *L*, mediante el conmutador de pila *M*, que debe estar inmediato al observador, con el fin de que sea fácil aumentar ó disminuir la intensidad según convenga, y algunos banquillos trípodes de distintas alturas para el cronómetro y para el observador, de modo que éste busque su comodidad según la altura á que quede el ocular. Un farol grande para iluminación del local, colocado siempre á espaldas del observador, y además otro pequeño para llevarlo adonde se necesite aumento de iluminación. Tanto este último como el que ilumina al cronómetro deben estar provistos de pantallas en forma de visera para que iluminen donde convenga y no molesten á la vista del observador.

La pila que he usado tiene 7 elementos Leclanché, y por medio del conmutador *M* se hace que funcionen todos 7, ó solamente 5 ó 3, según que convenga mayor ó menor intensidad de luz, de modo que ésta no sea tanta que impida ver

con claridad las imágenes de la estrella que se esté observando, ni tan escasa que no se distingan bien los hilos del retículo. La luz no debe emplearse sino cuando sea indispensable ver dichos hilos, y suprimirse en los momentos que no sea necesario verlos, pues de otro modo se debilitaría la corriente y podría faltar intensidad de luz en el momento crítico de la observación.

Antes de pasar adelante conviene recordar con cuatro palabras cómo son las *observaciones de precisión* y cuál es su carácter esencial, lo cual convendrá después tener presente en toda la explicación del manejo del instrumento que á continuación se expone.

Las *observaciones de precisión* con el sextante consisten únicamente en observar las horas á que diversos astros llegan á una misma altura, ó lo que es lo mismo, en observar las *horas de paso* de distintos astros por determinado almicantarat, para introducir luego estas horas en fórmulas de astronomía esférica, que dan determinaciones muy exactas de latitud, hora local, etc. De suerte que el instrumento de reflexión, aplicado á esta clase de observaciones, no es ya un instrumento que mida ángulos directamente, sino anteojo de pasos para poder fijar los intervalos de tiempo que median entre ellos.

La condición fundamental que han de tener estas observaciones es, por lo tanto, la de que se realicen todas las de un grupo en un mismo almicantarat, es decir, que la altura en que se verifiquen, sea real y efectivamente *una misma*. Para ello se ha procurado la solidez del instrumento y la inalterable trabazón entre todas sus partes, con el fin de que, fijada la alidada en la primera observación y no volviendo á tocarle, continúe el instrumento midiendo el mismo ángulo sin variación alguna, durante el período que abarcan las observaciones de un grupo. Para ello ha de evitar también el observador al instrumento todo choque, vibración ó influencia extraña por leve que sea, y ha de prohibirse á sí mismo el tocar á ninguna parte del instrumento durante ese período.

Los giros que sea necesario dar después de la primera observación,pueden hacerse con la mano en el contrapeso ó por medio de los tornillos colocados en el pie para los movimientos lentos. También ha de ponerse el mayor cuidado en que el horizonte artificial se coloque siempre en idéntica posición respecto al instrumento, con la misma orientación que tiene el vertical del astro que se va á observar; y conviene que uno de los costados del cubichete tenga marca visible á distancia para cómodamente vigilar que aquel costado caiga siempre á una misma mano del observador. En el mismo punto del campo del anteojo donde se verificó la primera observación deben verificarse todas las otras, sirviendo de guías para ello los hilos más próximos del retículo. En una palabra, ha de ponerse el mayor esmero en que todas las circunstancias de la observación sean idénticas para todas las observaciones, á fin de que el ángulo sometido á la observación sea idéntico en todas ellas y determine en la esfera celeste un mismo almicantarat.

Hasta el estado de la atmósfera convendría que fuera permanente; y cuando varíe, bien sea porque la presión atmosférica aumente ó disminuya, bien porque la temperatura cambie, se llevará cuenta de estas diferencias por medio del barómetro y del termómetro, para evaluar las variaciones consiguientes de la refracción astronómica, que harán distinta la altura verdadera de la observación y reclaman la oportuna corrección en los cálculos.

Para llegar á la práctica de estas observaciones se empieza por calcular aproximadamente las horas de cronómetro á que deben verificarse las observaciones que se intentan, así como sus azimutes y el duplo de la altura aparente proyectada.

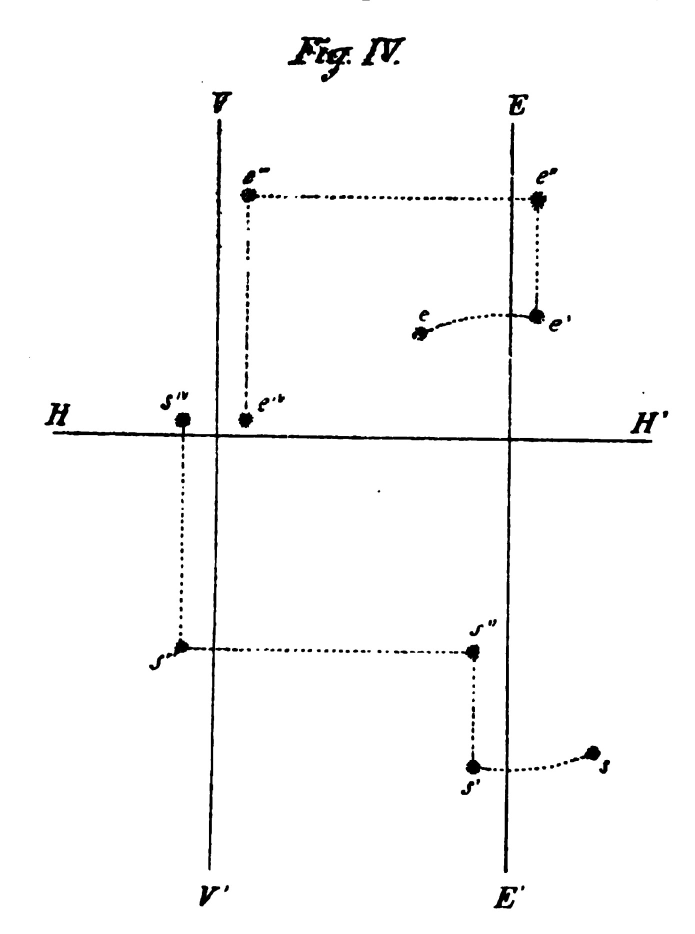
Se instala el pie del instrumento sobre el afirmado que previamente se preparó, de modo que sus tres tornillo-pies encajen en tres de las pequeñas excavaciones cónicas que se mencionaron antes, para que el eje vertical resulte correspondiente al centro del pavimento, y se nivela en seguida del modo indicado, á fin de que dicho eje quede vertical.

He tenido por costumbre dejar el pie en su sitio durante toda la temporada que han durado las observaciones, cuidando de cubrirlo, al finalizar las de cada noche, con una armazón de madera ligera forrada de tela impermeable para defenderlo de la intemperie; y con este procedimiento se ha conservado á veces la nivelación por meses enteros. Mientras tanto el instrumento ha permanecido en su caja ó bajo techado, y solamente se atornillaba á su pie minutos antes de comenzar las observaciones de cada noche, y después de haber fijado su índice en la graduación calculada. En seguida se gira éste alrededor del eje BC (Fig. III), paralelo á su plano, hasta tanto que dicho plano quede próximamente vertical: entonces se afirma con la mordaza M', y por medio del tornillo T' y de las indicaciones del nivel N', se perfecciona la verticalidad de dicho plano. Después, tomando como guías los trazos azimutales del pavimento, se procura poner el plano del instrumento en el azimut calculado para la observación que se intente, con giro alrededor del eje vertical. El tercer giro alrededor del eje VA (Fig. II), la mordaza M'' y el tornillo T'' se usarán á continuación para dejar la burbuja del nivel de Knorre en su centro; y ya en esta disposición, se procede á la colocación del horizonte artificial. Para facilitar ésta, he sujetado con alambres á la parte externa del anteojo una pequeña regla paralela á su eje, según puede verse en la Fig. I. Otra regla cuadrada de metro y medio de largo sirve de puntero para indicar el lugar del piso donde debe colocarse el horizonte artificial, adaptando el puntero por la extremidad superior á la antedicha pequeña regla en toda su longitud y procurando que el vidrio anterior del cubichete y el objetivo del anteojo queden al mismo lado del puntero.

Poco antes de la hora calculada para la primera observación, dispuestos instrumento y horizonte en la forma que queda dicha, sentado el observador en el paraje que le indique el mismo instrumento, á mano el conmutador M, en conexión la lamparita L con la pila, el cronómetro abierto y colocado de modo que el observador oiga bien el batido del

segundo y pueda leer cómodamente en su esfera, y el farol F, provisto de reflector y de pantalla en forma de visera, iluminando al cronómetro de manera que la luz caiga de lleno sobre la esfera y no moleste á la vista del observador; éste verá entrar en el campo del anteojo las dos imágenes de la estrella uno ó varios minutos antes de la hora calculada. Cuando tal no ocurriera, debe atribuirse á algún pequeño error azimutal en la colocación del instrumento, y pronto se conseguirá verlas, girando un poco el instrumento á izquier-

Fig. IV.



da ó derecha alrededor del eje vertical, para lo cual se debe tener siempre suelta la mordaza M, y conviene no afirmarla sino algunos segundos antes de la observación.

La práctica ha aconsejado que no se procure la superposición ó coincidencia de las dos imágenes en esta clase de observaciones, sino que se las dirija de modo que, siguiendo el observador con la vista el movimiento descendente de la una y el ascendente de la otra, procedentes ambos de la variación en altura, juzgue consumada la observación al estar las dos imágenes á muy corta distancia una de otra y sobre una línea imaginaria horizontal ó paralela al hilo inmediato horizontal del retículo. Esto se hace por evitar un período largo de incertidumbre que ocurre al confundirse ambas imágenes, cuando la observación se practica procurando su coincidencia, como la teoría general enseña. La distancia horizontal entre ambas imágenes, además de pequeña, debe procurarse que sea siempre la misma en todas las observaciones del grupo, así como su respectiva colocación, es decir, que si la imagen reflejada por el horizonte artificial fué la que pasó á la derecha en la primera observación, lo sea también en las demás observaciones.

Para observar en la práctica todos estos preceptos, sin olvidar el indicado en otro lugar de que el ajuste se haga siempre en un mismo sitio del campo del anteojo, hay que tomar por guías los hilos del retículo y practicar los giros necesarios en la forma que se va á explicar á continuación.

Supóngase (Fig. IV) que HH' es un hilo horizontal del retículo, VV', EE' hilos verticales, que el observador se propone realizar todas las observaciones en e^{IV} y s^{IV}, la imagen reflejada por el horizonte artificial á la derecha de la otra, y que tiene las dos imágenes en dos puntos cualesquiera del campo, e y s, por ejemplo, siendo la imagen en e la reflejada por el horizonte artificial. Lo primero que debe hacer es mover el tornillo T' de la Fig. III, para que las imágenes describan dos arcos ee' y ss' en sentido inverso, hasta que vea que la línea imaginaria $e's'$ forma un pequeño ángulo con

la dirección vertical, estando e' más á la derecha que s'. Después, por medio del tornillo T'', hará que las dos imágenes asciendan paralelamente en las direcciones $e'e''$ y $s's''$, hasta tanto que la distancia al hilo horizontal sea algo mayor en la superior que en la inferior, y fijando entonces la mordaza M, llevará las imágenes á los puntos e^{III} y s^{III}, valiéndose del tornillo T. Ya en esta colocación esperará que las imágenes, por su movimiento inverso, se dirijan hacia e^{IV} y s^{IV}, cuidando de mantener el hilo VV' entre ambas por medio del tornillo T, con el cual seguirá la variación azimutal de ellas, mientras que con el oído sigue el batido del cronómetro y lleva en la mente la cuenta de los segundos para apreciar el décimo del segundo en el momento de la observación.

Concluída la primera observación, ya son más fáciles las restantes, siempre que la nivelación sea perfecta, pues bastará el giro azimutal del instrumento para conseguir que las imágenes de cada nueva estrella vengan á un tiempo á los puntos elegidos en el campo del anteojo para verificar la observación. Si la nivelación no fuere tan perfecta, habrá que añadir ligeras rectificaciones con los tornillos para movimientos lentos y en la forma ya indicada. De todos modos el pie del instrumento permanece en su instalación primitiva, el plano del instrumento busca por rotación azimutal al vertical de cada estrella, y el horizonte artificial es trasladado sucesivamente á cada nuevo azimut de observación. El conjunto de operaciones es tan sencillo y tan ajeno á dificultades, que pueden hacerse cómodamente varias observaciones en distintos azimutes, con tres minutos solamente de intervalo entre cada dos consecutivas.

Cuando se hacen varias observaciones de esta clase con el objeto de determinar, por ejemplo, la latitud de un lugar, se supone tácitamente que dichas observaciones se practican en el mismo lugar cuya latitud se va á determinar. Al medir una altura con instrumento de reflexión sobre horizonte artificial, el lugar de la observación no es el ocupado por el observador ni el que ocupa el instrumento, sino aquel sobre

que reposa el horizonte artificial. Ahora bien, según la explicación del párrafo anterior, hay en este sistema tantos lugares de observación como observaciones se han hecho, y ocurre á primera vista preguntar: ¿Cuál de estos lugares, ó de otros, es el correspondiente á la latitud que se va á determinar?

Cuando se practican estos métodos con instrumentos de reflexión comunes, se acostumbra colocar el horizonte artificial en el lugar cuya latitud se va á determinar, y no moverlo de allí mientras que el instrumento se traslada de un punto á otro alrededor del dicho horizonte; y de este modo la altura constante es la que arroja el instrumento, y todas las observaciones conjugadas se refieren al punto fijo zenit del horizonte.

Con el nuevo sextante lo que cambia de lugar es el horizonte artificial, y lo que queda fijo es el zenit del pie del instrumento, al cual corresponden alturas algo menores que al del horizonte. Pero como ambos zenites se hallan en posiciones idénticas respecto á cada una de las estrellas conjugadas de una serie de observaciones, la diferencia entre la altura constante que arroja el instrumento y la correspondiente al zenit fijo del pie es también constante, y por tanto, iguales entre sí las alturas referidas á este último: que es lo que pide el método, esto es, que las horas observadas correspondan á alturas iguales referidas en un punto fijo. Por otra parte, el dilucidado ahora se confunde con el teórico, pues generalmente es pequeñísima en la práctica la diferencia de que se trata.

CAPÍTULO III

DETERMINACIONES DE LATITUD

No parece oportuno repetir en esta Memoria todo lo que contiene la que se mencionó anteriormente, publicada el año de 1895, sobre el desarrollo teórico de los distintos métodos y fórmulas de la Astronomía esférica, aplicables á esta clase de observaciones de precisión con el sextante; pero como no siempre será fácil hallar á mano algún ejemplar de ella, por haber sido escasa la tirada, y agotada há tiempo, no estará de más que se recuerde aquí siquiera aquellos métodos que la experiencia adquirida desde entonces ha sancionado y declarado como más útiles, exactos, sencillos y convenientes, aunque solamente se exponga ahora su parte práctica, ilustrándola con algunos ejemplos y con los resultados obtenidos por medio del *nuevo sextante*, que así pondrá de manifiesto sus excelentes cualidades.

Respecto á determinaciones de latitud, dos son los métodos más recomendables por su exactitud y sencillez, así como por la brevedad de sus cálculos. Ambos tienen su fundamento, á semejanza del método de Talcott ó de Horrebow para el anteojo zenital, en la observación de dos estrellas que culminen una al norte y otra al sur del zenit, con distancias zenitales poco diferentes entre sí. Se diferencian de él en que el anteojo zenital mide las diferencias entre las distancias zenitales, ordinariamente en el meridiano, mien-

tras que el sextante se utiliza para observar las horas á que las estrellas atraviesan determinado almicantarat. Para uno de los dos métodos se observan tres de estos pasos y para el otro los cuatro, esto es, dos en el hemisferio oriental y dos en el occidental; pero como los procedimientos son esencialmente distintos, se tratará separadamente de uno y de otro.

En todo lo que queda por decir se entenderá que

a	es la altura verdadera, común á todas las observaciones de un grupo,
φ	la latitud del lugar,
a_1, φ_1	valores aproximados de altura y latitud, cuando éstas no son conocidas,
u, u', u'', u'''	las horas del cronómetro observadas y corregidas de movimiento con respecto al tiempo sidéreo, por el intervalo entre una y otra,
A, A', A'', A'''	los azimutes de las distintas observaciones correspondientes á dichas horas,
h, h'	los horarios de las dos estrellas,
α, α'	sus ascensiones rectas,
δ, δ'	sus declinaciones,
p, p'	los ángulos palarácticos.

Siguiendo la práctica constante, las ascensiones rectas se cuentan, de occidente á oriente, de cero á 360° ó 24^h; los horarios de oriente á occidente; entre los mismos límites; los azimutes, del sur hacia el oeste, de cero á 360°; las latitudes y declinaciones, de cero á 90°, con signo positivo las boreales y negativo las australes; las alturas de cero á 90°, positivas cuando el astro está sobre el horizonte, y á los estados absolutos y movimientos del reloj se les da signo positivo para el atraso y negativo para el adelanto.

Método de 3 observaciones. — Las fórmulas que se emplean son:

$$\left.\begin{array}{r}(u' - u) - (\alpha' - \alpha) = \lambda' \\ (u'' - u) - (\alpha' - \alpha) = \lambda'' \\ \sin\frac{1}{2}\lambda' \cot\frac{1}{2}(\delta - \delta') = D' \sin B' \\ \cos\frac{1}{2}\lambda' \operatorname{tang}\frac{1}{2}(\delta + \delta') = D' \cos B' \\ D' \cos\left(B' - \frac{1}{2}\lambda''\right) = \operatorname{tang}\varphi\end{array}\right\} (1)$$

Las horas u', u'' corresponden á las dos observaciones de una misma estrella. Las dos primeras ecuaciones dan los valores de λ' y λ''. Las dos siguientes los de B' y $\log D'$. El valor de D' se considera siempre esencialmente positivo y B' queda definido por los signos de su seno y de su coseno. La quinta ecuación, finalmente, da el valor de φ. Si se desearan conocer los horarios se hallarán por las fórmulas

$$\left.\begin{array}{l}h' = \frac{1}{2}(\lambda'' - \lambda') \\ h = -\frac{1}{2}(\lambda'' + \lambda')\end{array}\right\} (2)$$

Y si se desea conocer la altura, no hay más que calcularla con uno de estos horarios, la declinación correspondiente y la latitud hallada.

Ejemplo. El 6 de Diciembre de 1899 se observó en Jerez con el nuevo sextante y el horizonte artificial una misma altura en las estrellas y á las horas de cronómetro que más adelante se expresan, siendo el movimiento horario de éste con respecto al tiempo sidéreo $+ 9^s,729$ en una hora del cronómetro.

ESTRELLAS	HORAS DEL CRONÓMETRO	INTERVALOS	CORREGIDOS DE MOVIMIENTO
Polar al Oeste....	2^h 04^m $33^s,5$		
Sirio al Este.....	1 32 28	32^m $05^s,5$	32^m $10^s,70$
Sirio al Oeste....	1 37 11	27 22 ,5	27 26 ,94

Las posiciones aparentes de las estrellas eran

$$\alpha = 1^h\ 23^m\ 19^s{,}18 \qquad \delta = 88^\circ\ 46'\ 47'',56$$
$$\alpha' = 6\ 40\ 46{,}48 \qquad \delta' = -16\ 34\ 43{,}30$$

El cálculo es como sigue:

$$\delta + \delta' = 72^\circ\ 12'\ 04'',26 \qquad \frac{1}{2}(\delta + \delta') = 36^\circ\ 06'\ 02'',13$$
$$\delta - \delta' = 105\ 21\ 30{,}86 \qquad \frac{1}{2}(\delta - \delta') = 52\ 40\ 45{,}43$$

$u' - u$	$= -0^h\ 32^m 10^s{,}70$	$u'' - u$	$= -0^h\ 27^m 26^s{,}94$
$\alpha' - \alpha$	$= 5\ 17\ 27{,}30$	$\alpha' - \alpha$	$= 5\ 17\ 27{,}30$
λ'	$= -5\ 49\ 38{,}00$	λ''	$= -5\ 44\ 54{,}24$
$\frac{1}{2}\lambda'$	$= -2\ 54\ 49{,}00$	$\frac{1}{2}\lambda''$	$= -2\ 52\ 27{,}12$
	$= -43^\circ\ 42'\ 15''$		$= -43^\circ\ 06'\ 46'',80$
$\text{l. sin}\ \frac{1}{2}\lambda'$	$= 9.83943718_n$	$\text{l. cos}\ \frac{1}{2}\lambda''$	$= 9.85908838$
$\text{l. cot}\ \frac{1}{2}(\delta - \delta')$	$= 9.88216428$	$\text{l. tan}\ \frac{1}{2}(\delta + \delta')$	$= 9.86286355$
$\text{l.}\ (D' \sin B)$	$= 9.72160146_n$	$\text{l.}\ (D' \cos B')$	$= 9.72195193$
$\text{l. tan}\ B'$	$= 9.99964953_n$	$\text{l. cos}\ B'$	$= 9.84966017$
B'	$= -44^\circ\ 58'\ 36'',77$	$\text{l.}\ D'$	$= 9.87229176$
$\frac{1}{2}\lambda''$	$= -43\ 06\ 46{,}80$	$\text{l. cos}\left(B' - \frac{1}{2}\lambda''\right)$	$= 9.99977016$
$B' - \frac{1}{2}\lambda''$	$= -1\ 51\ 49{,}97$	$\text{l. tan}\ \varphi$	$= 9.87206192$

$$\varphi = 36^\circ\ 40'\ 48'',53$$

Los horarios, según las ecuaciones (2), serán

$$h' = 2^m\ 21^s{,}88 \qquad h = 5^h\ 47^m\ 16^s{,}12$$

Conviene casi siempre conocer la altura en esta clase de observaciones, para aplicarla después á la determinación del estado absoluto del cronómetro en la forma que en su lugar

se expondrá. Esta altura puede hallarse, bien como se ha indicado, bien por las fórmulas siguientes, que son las de reducción al meridiano de una altura circunmeridiana

$$\left.\begin{aligned} 2\sin^2\frac{1}{2}h'\ \operatorname{cosec} 1'' &= m \\ 2\sin^4\frac{1}{2}h'\ \operatorname{cosec} 1'' &= n \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

$$\left.\begin{aligned} 90^\circ \mp (\delta' - \varphi) &= a_0 \\ \cos\varphi \cos\delta' \sec a_0 &= M \\ M^2 \operatorname{tang} a_0 &= N \\ a_0 - Mm + Nn &= a \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Cuando se trata de un paso meridiano inferior, se pone $180^\circ - \delta'$ en vez de δ'.

Si se aplican estas fórmulas al ejemplo anterior, se obtiene, empleando logaritmos de 5 cifras decimales para el cálculo de log M, y de 3 solamente para log N; y tomando el signo {superior / inferior} para la culminación {boreal / austral}:

$$\begin{aligned} \delta' &= -16^\circ\ 34'\ 43'',30 \\ \varphi &= 36\ \ 40\ \ 48\ ,53 \\ \hline \delta' - \varphi &= -53\ \ 15\ \ 31\ ,83 \\ 90^\circ + (\delta' - \varphi) &= 36\ \ 44\ \ 28\ ,17 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \log\cos\varphi &= 9.90416 \\ \log\cos\delta' &= 9.98156 \\ \log\sec a_0 &= 0.09618 \\ \hline \log M &= 9.98190 \\ \log M^2 &= 9.964 \\ \log\operatorname{tang} a_0 &= 9.873 \\ \hline \log N &= 9.837 \end{aligned}$$

Generalmente se observan las mismas estrellas durante una serie de noches; pero el cálculo de log M y log N, que se acaba de exponer, se practica solamente una vez para la observación de la primera noche, y estos valores hallados sirven para todas las demás. En la tabla VI del tomo II del *Manual de Astronomía esférica y práctica* de W. Chauvenet,

están calculados los valores de log m y log n con el horario por argumento, de suerte que el cálculo diario de estas fórmulas es sencillísimo. Para la observación del 6 de Diciembre, á que se refiere el ejemplo anterior, se tiene

$$\begin{array}{llll} \log M & = 9.98190 & \log N & = 9.837 \\ \log m & = 1.04057 & \log n & = 6.431 \\ \hline \log Mm & = 1.02247 & \log Nn & = 6.268 \\ Mm & = 10'',53 & Nn & = 0'',00 \end{array}$$

$$a = 36^\circ\ 44'\ 17'',64$$

Otra forma de resolver el mismo problema.—Cuando se quiere calcular latitud y altura, son más convenientes las fórmulas (5) que van á continuación. De todos modos son útiles unas y otras para buscar la comprobación del cálculo por la coincidencia en los resultados obtenidos por dos caminos distintos, especialmente cuando no se dispone de calculadores que trabajen á doble mano.

$$\left.\begin{array}{r} \sin\frac{1}{2}(\delta'-\delta)\sec\frac{1}{2}(\delta'+\delta)\cot\frac{1}{2}\lambda'' = \operatorname{tang} F' \\ \sin\frac{1}{2}(\delta'-\delta)\sec\frac{1}{2}(\delta'+\delta)\cot\frac{1}{2}\lambda' = \operatorname{tang} F'' \\ F' + F'' = p \\ -\frac{1}{2}(\lambda' + \lambda'') = h \\ \cos\frac{1}{2}(h+p)\sec\frac{1}{2}(h-p)\operatorname{tang}\left(45^\circ + \frac{1}{2}\delta\right) = \operatorname{tang}\frac{1}{2}(\varphi + a) \\ \sin\frac{1}{2}(h-p)\operatorname{cosec}\frac{1}{2}(h+p)\cot\left(45^\circ + \frac{1}{2}\delta\right) = \operatorname{tang}\frac{1}{2}(\varphi - a) \end{array}\right\}(5)$$

Estas fórmulas presentan un inconveniente, y es, que estando expresados los distintos ángulos por medio de sus tangentes, queda la incertidumbre del cuadrante en que se deben tomar. Se puede, sin embargo, proceder arbitrariamente; pero entonces debe tomarse $180^\circ + h$ en vez de h, cuando

para φ y a se hallen valores tales que cos φ y sin a tengan signos contrarios. También, cuando para φ y a se hallen valores mayores que 90°, se deben tomar sus diferencias con el múltiplo de 180° más próximo. Finalmente, según que sin φ y sin a tengan signos iguales ó contrarios, será la latitud norte ó sur.

Ejemplo. Sea el mismo anterior, y aplicándole las fórmulas (5), se obtiene lo que sigue, debiendo advertir que á pesar de que en éste y otros ejemplos se usen logaritmos de 8 cifras decimales, no son necesarios, y bastan los comunes de 7 cifras decimales para alcanzar la suficiente exactitud.

$\text{l. sin}\,\frac{1}{2}(\delta' - \delta)$	=	9.90050605_n	$\text{l. sin}\,\frac{1}{2}(\delta' - \delta)$	=	9.90050605_n
$\text{l. sec}\,\frac{1}{2}(\delta' + \delta)$	=	0.09259735	$\text{l. sec}\,\frac{1}{2}(\delta' + \delta)$	=	0.09259735
$\text{l. cot}\,\frac{1}{2}\lambda''$	=	0.02862713_n	$\text{l. cot}\,\frac{1}{2}\lambda'$	=	0.01965119_n
$\text{l. tan}\,F'$	=	0.02173053	$\text{l. tan}\,F''$	=	0.01275459
F'	=	46° 25′ 58″,222	$h + p$	=	179° 05′ 28″,436
F''	=	45 50 28 ,414	$h - p$	=	—5 27 24 ,836
$p = F' + F''$	=	92 16 26 ,636	$\frac{1}{2}(h + p)$	=	89 32 44 ,218
$h = -\frac{1}{2}(\lambda' + \lambda'')$	=	86 49 01 ,80	$\frac{1}{2}(h - p)$	=	—2 43 42 ,418
$\text{l. cos}\,\frac{1}{2}(h + p)$	=	7.89929582	$\text{l. sin}\,\frac{1}{2}(h - p)$	=	8.67762912_n
$\text{l. sec}\,\frac{1}{2}(h - p)$	=	0.00049261	$\text{l. cosec}\,\frac{1}{2}(h + p)$	=	0.00001365
$\text{l. tan}\,\frac{1}{2}\left(45° + \frac{1}{2}\delta\right)$	=	1.97273294	$\text{l. cot}\left(45° + \frac{1}{2}\delta\right)$	=	8.02726706
$\text{l. tan}\,\frac{1}{2}(\varphi + a)$	=	9.87252137	$\text{l. tan}\,\frac{1}{2}(\varphi - a)$	=	6.70490983_n
$\frac{1}{2}(\varphi + a)$	=	36° 42′ 33″,08	φ	=	36° 40′ 48″,53
$\frac{1}{2}(\varphi - a)$	=	—0 01 44 ,55	a	=	36 44 17 ,63

***Variaciones en la refracción.*—Sabido es que la refracción astronómica no es constante para la misma altura, sino que varía con la temperatura y la presión atmosférica.**

Siendo el fundamento de las observaciones de precisión la invariabilidad de la altura en todas las observaciones de un mismo grupo, ocurre en la práctica que, aun cuando la alidada estuviese perfectamente fija y el instrumento fuese inalterable, y el observador no cometiera error ninguno de observación, lo más que se podría alcanzar sería que para todas las observaciones la altura aparente fuera una misma; pero en rigor la altura verdadera será distinta, porque la refracción varía entre unas y otras. Muchas veces será insignificante la variación y no habrá que llevar cuenta de ella; pero en algunos casos, como suelen ocurrir cambios rápidos de temperatura durante la noche, convendrá llevar en cuenta estas variaciones y corregir la hora de una segunda observación por razón de esta diferencia de altura verdadera entre la primera y segunda, para tener todas las horas referidas á igual altura verdadera que la correspondiente á la primera observación. Para esto conviene tener barómetro y termómetro en el lugar de la observación y anotar sus indicaciones de media en media hora. Sean

τ_o	la temperatura al aire libre, en el momento de la primera observación y expresada en grados del termómetro centígrado,
τ_n	la misma al hacer otra observación cualquiera,
r_o, r_n	las refracciones correspondientes á ambas observaciones,
R	la refracción astronómica media, calculada por la fórmula de Bessel para la altura observada, presión atmosférica de 752 milímetros y temperatura de 10°, la cual sa hallará en la Tabla I, al final de la presente Memoria y con la altura por argumento,
F_o, F_n	los factores que se hallarán en la segunda parte de la misma tabla, correspondientes á las temperaturas τ_o τ_n.

La variación en refracción expresada en segundos, será

$$\rho = r_n - r_o = R\,(F_n - F_o) \qquad (6)$$

Si la primera observación se hizo en la altura verdadera a, la segunda se habrá hecho en la altura verdadera $a - \rho$.

Si se llama $u'_{a-\rho}$ á la hora en que se observó esta segunda estrella, se obtendrá la hora u'_a á que se hubiera observado la misma en la altura a, por medio de la fórmula

$$u'_a = u'_{a-\rho} \pm \frac{\rho}{15 \cos\varphi \sin A'}, \qquad (7)$$

en la cual la fracción está expresada en segundos de tiempo y debe emplearse el signo $\left\{\begin{matrix}\text{superior}\\ \text{inferior}\end{matrix}\right\}$ cuando la segunda observación haya sido al $\left\{\begin{matrix}\text{este}\\ \text{oeste}\end{matrix}\right\}$ del meridiano.

Del mismo modo se corrigen las demás observaciones para que queden todas las horas referidas á altura verdadera igual á la de la primera observación.

Alguna vez ocurre que no es la hora la que se quiere corregir, sino la altura, como se verá más adelante al tratar de arreglo de cronómetros, y entonces basta aplicar la corrección ρ, tal como se obtiene por la ecuación (6).

Las variaciones de presión atmosférica también influyen en la magnitud de la refracción; pero no hago mención de ellas porque son tan insignificantes en el corto período que abarcan estas observaciones, que jamás he encontrado oportunidad para poder aplicar corrección ninguna por este motivo. Es probable que cuando ocurran variaciones importantes, sean tales las perturbaciones atmosféricas que no permitan la observación.

Ejemplo. El 28 de Noviembre de 1899 se observó en una misma altura la estrella Sirio al este y al oeste del meridiano y en las horas del cronómetro

$1^h\ 59^m\ 54^s{,}5$
$2\ \ 11\ \ 51$

y en el comedio de estas observaciones el termómetro centígrado al aire libre marcaba 14°,0. También se observó la Polar en la misma altura aparente á las

$$2^h\ 38^m\ 36^s$$

y el mismo termómetro marcaba entonces 13°,25. Se desea averiguar la hora á que se hubiera observado la Polar en la misma altura verdadera que Sirio. Se tienen como valores aproximados

$$a = 36^\circ\ 44'$$
$$\varphi = 36\ \ 40\ \ 50''$$
$$A = 178\ \ 28\ \ 36,$$

por consiguiente,

$$\frac{1}{15 \cos \varphi \sin A} = 3.127$$

Por medio de la Tabla I se halla

$$R = 77''$$
$$F_o = 0.9837$$
$$F_n = 0.9863$$
$$F_n - F_o = 0.0026$$

y por tanto,

$$\rho = 0'',20$$
$$u'_a = u'_{a-\rho} - 0^s,63 = 2^h\ 38^m\ 35^s,37$$

esto es, que la Polar se hubiera observado á $2^h\ 38^m\ 35^s,37$ del cronómetro en la misma altura verdadera en que se observó Sirio.

Elección de estrellas y cálculo previo.—Para esperar la mayor exactitud en la latitud determinada por este método de las 3 observaciones, deben elegirse 2 estrellas que reunan las condiciones siguientes:

1.ª Magnitud no inferior á 4,0, porque, aunque sean visibles las de 5.ª magnitud, y aun las de 6.ª, no se las ve con toda la distinción necesaria, á causa de la iluminación del retículo.

2.ª Declinaciones cuya suma se aproxime al duplo de la latitud.

3.ª Que lleguen las dos estrellas á una misma altura en

horas próximas entre sí y comprendidas dentro del período que se destine á la observación.

4.ª Que sus verticales se aparten poco del meridiano, y que el de la estrella que se observa una sola vez, sea el que menos se aparte.

5.ª Que la altura esté comprendida entre 34° y 76°, para evitar las irregularidades de la refracción y las molestias de la observación en alturas pequeñas, así como el movimiento rápido en altura y el pronto desvío del meridiano en las observaciones de estrellas próximas al zenit, nada convenientes para la determinación que se intenta.

Ordinariamente se usan las 3 observaciones en vez de las 4, cuando una de las estrellas es circumpolar, condición muy apreciable para el caso, porque el movimiento lento en altura proporciona gran exactitud á la observación. Ocurre que la estrella circumpolar no exige ser observada en pequeño horario como las demás, porque aun siendo grande su horario, puede llenar la condición de desviarse poco su vertical del meridiano; y si fuere preciso observarla una vez en gran horario, para que su hora de observación no diste mucho de las correspondientes á la otra estrella, la segunda observación de la circumpolar al otro lado del meridiano ocurrirá en hora muy distante para poder ser incluída en el mismo grupo de observaciones, y hay que reducirse á las 3 solamente. También puede ocurrir que en un grupo de 4 observaciones se pierda por accidente una de ellas, y no procede despreciar las 3 restantes; sino utilizarlas por el presente método, cuando á él se presten.

Si se trata de buscar, por ejemplo, una combinación de 2 estrellas para un lugar, cuya latitud aproximada es 36° 40′ 50″, y para hora comprendida entre 5^h y 9^h de tiempo sidéreo, en el mes de Diciembre de 1899, se ve desde luego que Sirio y la Polar tienen magnitud conveniente, y declinaciones cuya suma 72° 12′ no dista mucho del duplo de la latitud. Se ve también facilmente que Sirio culmina á 6^h 41^m de tiempo sidéreo, y en altura 36° 44′ 33″, que la Polar puede

llegar á esa misma altura en horario 5^h 47^m, ó sea á la hora sidérea 7^h 9^m, la cual no dista mucho de la culminación de Sirio; por tanto este par de estrellas reune todas las condiciones exigidas. Eligiendo ahora una altura algo más pequeña que la de Sirio en su culminación, por ejemplo 36° 43′ 10″, y calculando aproximadamente los horarios y azimutes correspondientes á esta altura, se obtiene:

ESTRELLAS	HORARIO OCCIDENTAL	AZIMUT
Sirio..........	6^m 41^s,3	2°
Polar.........	5^h 51	178 28′ 36″

y suponiendo que el estado absoluto del cronómetro, para la noche destinada á empezar las observaciones, sea + 5^h 6^m, se forma el siguiente programa de datos aproximados para guía de la observación.

ESTRELLAS	AZIMUT	HORA SIDÉREA	HORA DEL CRONÓMETRO
Sirio............	358°	6^h 35^m	1^h 29^m
Sirio............	2	6 47	1 41
Polar...........	178 30′	7 13	2 07

Altura doble aparente 73° 28′ 54″.

Error probable de observación.—En una observación de las que quedan indicadas para cada estrella, hay entre la altura y la hora una correspondencia que se aspira á que fuera perfecta; pero que en la práctica resulta imperfecta por insuficiencias en la vista, oído y apreciación del observador, variaciones en el instrumento, perturbaciones en la refracción, irregularidades en la marcha supuesta al cronómetro y defectos del horizonte artificial ó de su colocación. El error resultante de todos estos orígenes puede achacarse indiferentemente á la altura, dando la hora por buena ó viceversa.

Este error resultante, llamado *error de observación*, debe considerarse por su múltiple origen como irregular ó *fortuito*, esto es, como susceptible de tener todos los valores, positivos ó negativos, dentro de ciertos límites; y si alguna parte tuviere de regular ó *constante*, ésta parte no influirá sobre los resultados, por la naturaleza de los métodos que aquí se usan; exceptuando solamente el caso de un error en el movimiento supuesto al cronómetro.

En lo que sigue se supondrá para cada observación aislada que la hora es exacta y que el error total de observación recae íntegro sobre la altura; se llamará $d\,a$ al *error probable de una observación aislada*, y $d\,\varphi$ al *error probable de la determinación de latitud*, originado por los errores de las 3 observaciones. Las fórmulas (8), que van á continuación, sirven para calcular la relación que existe entre ambos errores probables, como también para medir el grado de precisión de un sistema elegido de 3 estrellas, el cual será tanto mayor cuanto menor sea la relación $\frac{d\,\varphi}{d\,a}$. Por último, es de advertir que en la determinación de latitud influyen además otros errores independientes de $d\,\varphi$, como son los que proceden de los errores que afectan á las ascensiones rectas y declinaciones, los cuales se procurará disminuir por la observación de varios grupos de distintas estrellas; pero ahora solo se va á considerar el error probable $d\,\varphi$ originado por la observación:

$$\left.\begin{aligned}
\cos\frac{1}{2}(A''+A')\,\mathrm{cosec}\,\frac{1}{2}(A'-A)\,\mathrm{cosec}\,\frac{1}{2}(A-A'') &= c\\
\cos\frac{1}{2}(A+A'')\,\mathrm{cosec}\,\frac{1}{2}(A''-A')\,\mathrm{cosec}\,\frac{1}{2}(A'-A) &= c'\\
\cos\frac{1}{2}(A'+A)\,\mathrm{cosec}\,\frac{1}{2}(A-A'')\,\mathrm{cosec}\,\frac{1}{2}(A''-A') &= c''\\
0{,}25\,(c^2+c'^2+c''^2) &= X\\
d\,a\sqrt{X} &= d\varphi
\end{aligned}\right\}\quad(8)$$

El valor de X viene á ser la medida de la bondad del sistema de estrellas elegido para la observación. El límite inferior de X es 0,375 y el superior es infinito. Sistema de es-

trellas cuyos azimutes den para X un valor inferior á 0,5 será excelente; y más, si los tres verticales distan poco del meridiano, porque el movimiento lento en altura facilita la observación y contribuye á su mayor exactitud y á disminuir por consiguiente el valor de $d\ a$.

Conviene hacer una dilación para aclarar este último punto. Las fórmulas (8), que dan el valor de X como medida de la bondad del sistema de estrellas elegido, están fundadas sobre la hipótesis de que el error probable en altura es siempre uno mismo, cualquiera que sea el vertical de la estrella observada; y esta hipótesis se estableció para facilitar el análisis, aun sospechando que pudiera no ser exacta (1), *porque la mayor ó menor velocidad de la estrella, ya sea en el sentido de la altura, ya en el sentido del azimut, podía influir algo en la percepción del órgano visual ó en la tranquilidad de ánimo favorable al perfeccionamiento de la observación:* pero se consideró que las diferencias podían ser muy cortas y que en último caso favorecían á las conclusiones que se deducen de la hipótesis, considerada como exacta. En efecto, ya se ha visto que una de estas conclusiones es que los verticales de las estrellas elegidas se aparten poco del meridiano; y justamente cuanto el vertical se aparte menos del meridiano, el error probable en altura es tanto menor. Por tanto, entre varios sistemas de estrellas que den para X pequeños valores, debe elegirse aquel en que los verticales de las observaciones se aparten menos del meridiano. Estas diferencias de error probable, que la experiencia acreditó con los sextantes comunes, y que hoy pone más de manifiesto el sextante nuevo, tiene su explicación en las distintas influencias que en cada caso tienen las varias causas que concurren á formar el error total de observación.

Sabido es que cuando un ángulo formado por dos visuales disminuye indefinidamente, la vista lo distingue hasta que llega á cierto límite de pequeñez, por bajo del cual las dos

(1) Véase la Memoria que se publicó en 1895, anteriormente citada.

visuales se confunden en una sensación única para la retina, lo mismo que si los puntos observados estuvieran en contacto; y por tanto la vista resulta impotente para distinguir ángulos menores que aquel límite. Este límite disminuye á proporción que aumenta la amplificación del anteojo empleado para la observación. Si se designa con i el valor de este ángulo límite para el anteojo del nuevo sextante y con a_0 la altura aparente del astro cuando las dos imágenes estén en perfecta coincidencia, ocurrirá que para el observador habrá coincidencia aparente desde que las dos visuales forman el angulo $2\ a_0 - i$, hasta que llegan á formar un ángulo mayor que $2\ a_0 + i$, y que en el período comprendido entre estos dos límites, el cual puede llamarse *período de indecisión*, no podrá distinguir cual es el instante de la única y real coincidencia. Entonces optará racionalmente por elegir para momento de la observación el comedio de este período, cuyas horas extremas habrá conservado en la mente. Ahora bien, este período de indecisión puede tener magnitudes muy distintas; desde $0^s,1$ en las proximidades del vertical primario y en latitudes no muy elevadas, hasta 10^s, ó más, en las proximidades del meridiano, pues su duración es inversamente proporcional al seno del azimut. En el primer caso nada más fácil que un error de uno ó dos décimos de segundo en la apreciación de las horas límites, que ocasionará para el comedio error mayor que i. En el segundo caso, aunque el error de la hora elegida, como comedio del período de precisión, esté equivocada en dos ó tres segundos, cosa bien difícil, todavía el error de la observación no llegaría á $\frac{1}{2}\ i$. Agréguese á esto la tranquilidad de ánimo con que se observa este movimiento pausado en altura en el segundo caso, comparado con la rapidez del primero, y las irregularidades del cronómetro que, aun siendo de pocos décimos de segundo, se traducirán en un incremento importante de altura en el primer caso y casi nulo en el segundo, y se verá claramente los fundados motivos que hay para te-

ner error probable en altura más pequeño, á medida que el vertical de la observación se aproxima más al meridiano.

Aun cuando en todo lo anterior se ha hablado de coincidencias de imágenes para mayor claridad, las mismas consideraciones son aplicables al sistema adoptado de observar haciendo pasar una imagen al lado de la otra, pues igualmente se observan *períodos de indecisión* de análogas dimensiones.

Volviendo ahora á las fórmulas (8) y aplicándolas al mismo ejemplo que viene tratándose, se obtiene:

A	=	178°	28′, 6
A'	=	358	
A''	=	2	
$A''+A'$	=	360	
$A+A''$	=	180	28, 6
$A'+A$	=	536	28, 6
$A''-A'$	=	−356	
$A-A''$	=	176	28, 6
$A'-A$	=	179	31, 4
$\frac{1}{2}(A''+A')$	=	180	
$\frac{1}{2}(A+A'')$	=	90	14, 3
$\frac{1}{2}(A'+A)$	=	268	14, 3
$\frac{1}{2}(A''-A')$	=	−178	
$\frac{1}{2}(A-A'')$	=	88	14, 3
$\frac{1}{2}(A'-A)$	=	89	45, 7

l. cos $\frac{1}{2}(A''+A')=$	0.00000_n
l. cosec $\frac{1}{2}(A'-A)=$	0.00000
l. cosec $\frac{1}{2}(A-A'')=$	0.00021
$c = -1.0005$	0.00021_n
l. cos $\frac{1}{2}(A+A'')=$	7.61906_n
l. cosec $\frac{1}{2}(A''-A')=$	1.45718_n
l. cosec $\frac{1}{2}(A'-A)=$	0.00000
$c' = 0.1192$	9.07624
l. cos $\frac{1}{2}(A'+A)=$	8.48773_n
l. cosec $\frac{1}{2}(A-A'')=$	0.00021
l. cosec $\frac{1}{2}(A''-A')=$	1.45718_n
$c'' = 0.8813$	9.94512

$$X = 0,448$$
$$d\varphi = 0,67\, d a$$

Acercándose el valor de X bastante al límite inferior 0,375, se deduce que el sistema de estrellas elegido es excelente, y lo hace aun más la notable pequeñez de los ángulos que los verticales forman con el meridiano, que no pasan de 2º.

Para formar alguna idea de los valores que puede tomar X cuando no se ajusta la elección á las condiciones establecidas, puede repetirse el cálculo con el mismo azimut $A = 178^\circ\ 28',6$ y los azimutes, aun más inmediatos al meridiano,

$$A' = 359^\circ\ 50', \qquad A'' = 0^\circ\ 10',$$

y resultará

$$X = 10{,}819.$$

Con los valores del primitivo ejemplo $A' = 358^\circ$, $A'' = 2^\circ$ y un nuevo valor para A de 160º, resulta

$$X = 13{,}170,$$

y con los mismos valores de A' y A'', y un nuevo valor para A de 110º, se obtiene

$$X = 202{,}29.$$

Estos tres casos muestran la importancia de la condición 4.ª, que obliga al vertical de la estrella que se observa una sola vez, á ser el más próximo al meridiano.

El valor de $d\,\varphi$, esto es, del *error probable de observación* en una sola determinación de latitud obtenida por el presente método de las tres observaciones, con el nuevo sextante, se va á hallar por los datos que contiene la tabla que sigue:

En su segunda columna están todas las determinaciones de latitud obtenidas por las tres observaciones del par de estrellas antedicho, Sirio y la Polar, desde 28 Noviembre hasta 23 Diciembre de 1899; en la tercera, encabezada con v, figuran las diferencias entre la latitud hallada cada noche y la latitud

promedio; y en la cuarta, encabezada con [v v], los cuadrados de estas diferencias.

Año 1899.	Latitud obtenida	v	[v v]
28 Noviembre.	36° 40′ 48″,68	+ 0″,10	0,0100
30 —	48 ,47	— 0 ,11	0,0121
1 Diciembre.	48 ,59	+ 0 ,01	0,0001
2 —	48 ,79	+ 0 ,21	0,0441
3 —	48 ,93	+ 0 ,35	0,1225
4 —	48 ,52	— 0 ,06	0,0036
5 —	48 ,50	— 0 ,08	0,0064
6 —	48 ,53	— 0 ,05	0,0025
8 —	48 ,56	— 0 ,02	0,0004
9 —	49 ,00	+ 0 ,42	0,1764
11 —	48 ,45	— 0 ,13	0,0169
14 —	49 ,00	+ 0 ,42	0,1764
15 —	48 ,09	— 0 ,49	0.2401
17 —	48 ,43	— 0 ,15	0,0225
20 —	48 ,43	— 0 ,15	0,0225
21 —	48 ,52	— 0 ,06	0,0036
23 —	48 ,34	— 0 ,24	0,0576
Sumas........	825 ,83	— 0 ,03	0,9177
Promedio.....	36 40 48 ,58		

El error probable de una observación aislada de latitud, según esta serie, es

$$0{,}6745\sqrt{\frac{0{,}9177}{17-1}} = \pm\ 0'',16,$$

y el de la latitud-promedio

$$\pm\ \frac{0''16}{\sqrt{17}} = \pm\ 0'',04.$$

De la fórmula antes hallada

$$d\ \varphi = 0{,}67\ d\ a,$$

se puede ahora deducir el valor de $d\ a$, error probable de una sola observación en altura, y resulta

$$d\ a = \pm\ 0'',24.$$

Para los sextantes comunes se halló este valor igual á $\pm$ 1'',20, esto es, cinco veces mayor.

Método de las 4 observaciones.—Como ya se ha indicado, este método consiste en observar las horas de los 4 pasos por un mismo almicantarat, de 2 estrellas oportunamente elegidas. Cada estrella, por lo tanto, se observa al Este y al Oeste del meridiano en una misma altura, y el intervalo entre éstas dos horas observadas, reducido á tiempo sidéreo, es el doble del horario. Conocidos así los dos horarios, las fórmulas (9) ó las (10) dan una determinación muy exacta de la latitud.

$$\left.\begin{aligned} \cos\delta \, \cos h &= g \\ \cos\delta' \cos h' &= f \\ \frac{1}{2}(f-g)\,\text{cosec}\,\frac{1}{2}(\delta-\delta')\sec\frac{1}{2}(\delta+\delta') &= \text{tang}\,\varphi \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

$$\left.\begin{aligned} \sin\frac{1}{2}(h'-h)\cot\frac{1}{2}(\delta-\delta') &= D\sin B \\ \cos\frac{1}{2}(h'-h)\,\text{tang}\,\frac{1}{2}(\delta+\delta') &= D\cos B \\ B+\frac{1}{2}(h'-h) &= C \\ D\cos(h+C) &= \text{tang}\,\varphi \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Cuando se desee conocer además la altura, puede hallarse su valor por las fórmulas (11),

$$\left.\begin{aligned} \cot\varphi\cos h &= \text{tang}\,F \\ \sin\varphi\sin(\delta+F)\sec F &= \sin a \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

ó bien por las (4), de reducción al meridiano, aplicadas á cualquiera de las dos estrellas. De las fórmulas (10) hay que hacer análogas advertencias á las que se hicieron de las fórmulas (1).

EJEMPLO. El 1.° de Marzo de 1900 se observaron en Jerez con el nuevo sextante las estrellas y á las horas de cronómetro que á continuación se indican, siendo el movimiento horario del cronómetro con respecto al tiempo sidéreo + 9^s,693, en una hora del cronómetro.

	o *Ursae Majoris*	α *Leonis*
Al Este del m.°	6^h 26^m 14^s,5	8^h 00^m 54^s,8
Al Oeste del m.°	6 39 04 ,7	8 26 00 ,7
Intervalo cronómetro.	= 12 50 ,2	25 05 ,9
p. p. movimiento.	= 2 ,08	4 ,06
Intervalo t.° s.°	= 12 52 ,28	25 09 ,96
h	= 6 26 ,14	12 34 ,98
	= 1° 36′ 32″,10	3° 08′ 44″,70

δ	= 61° 03′ 06″,91	$\delta + \delta'$	= 73° 30′ 11″,90
δ'	= 12 27 04 ,99	$\delta - \delta'$	= 48 36 01 ,92
$h' - h$	= 1 32 12 ,60	$\frac{1}{2}(\delta + \delta')$	= 36 45 05 ,95
$\frac{1}{2}(h' - h)$	= 0 46 06 ,30	$\frac{1}{2}(\delta - \delta')$	= 24 18 00 ,96

Aplicando ahora las fórmulas (9), se obtiene

$\log \cos \delta'$	= 9.98966304	$\log \cos \delta$	= 9.68486050
$\log \cos h'$	= 9.99934510	$\log \cos h$	= 9.99982875
$\log f$	= 9.98900814	$\log g$	= 9.68468925
f	= 0.975007910	$\log \frac{1}{2}(f - g)$	= 9.39021232
g	= 0.483826054	$\text{l. cosec} \frac{1}{2}(\delta - \delta')$	= 0.38561053
		$\log \sec \frac{1}{2}(\delta + \delta')$	= 0.09623925
$f - g$	= 0.491181856		
$\frac{1}{2}(f - g)$	= 0.245590928	$\log \text{tang}\, \varphi$	= 9.87206210

$$\varphi = 36^\circ\ 40'\ 48'',57.$$

Si se hace ahora el cálculo por las fórmulas (10), se obtiene

l. sin $\frac{1}{2}(h'-h)$	$= 8.12746112$	l. cos $\frac{1}{2}(h'-h)$	$= 9.99996094$
l. cot $\frac{1}{2}(\delta-\delta')$	$= 0.34532020$	l. tang $\frac{1}{2}(\delta+\delta')$	$= 9.87319289$
log $(D \sin B)$	$= 8.47278132$	log $(D \cos B)$	$= 9.87315383$
log tang B	$= 8.59962749$	log cos B	$= 9.99965670$
B	$=2^{\circ}\,16'\,40'',16$	log D	$= 9.87349713$
C	$=3\ \ 02\ \ 46\ ,46$	log cos $(h+C)$	$= 9.99856499$
$h+C$	$=4\ \ 39\ \ 18\ ,56$	log tang φ	$= 9.87206212$

$$\varphi = 36^{\circ}\ 40'\ 48'',57.$$

También puede llegarse al mismo resultado por las fórmulas (12) que van á continuación y que son de reducción al meridiano, es decir, que r y r' son las correcciones que habría que aplicar á la altura observada, si fuera conocida, para tener las alturas meridianas de las dos estrellas.

$$\left.\begin{aligned} M\,m - N\,n &= r \\ M'\,m' - N'\,n' &= r' \\ \frac{1}{2}(\delta+\delta') + \frac{1}{2}(r-r') &= \varphi \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Los valores de log M y log N para una estrella, se calculan por las fórmulas (4) para la primera noche de observación del sistema de estrellas elegido, y estos valores sirven después para todas las demás noches. Del mismo modo se calculan log M' y log N' para la otra estrella. Así se obtiene para el ejemplo anterior

log $M = 9.97342$	log $M' = 0.28063$
log $N = 0.291$	log $N' = 0.908$

Con los horarios observados el 1.º de Marzo se halla en la tabla VI del *Tratado de Astronomía* de Chauvenet

$\log m = 1.91019$	$\log m' = 2.49249$
$\log n = 8.202$	$\log n' = 9.369,$

y por consiguiente,

$\log Mm$	$= 1.88361$	$\log M'm'$	$= 2.77312$
$\log Nn$	$= 8.493$	$\log N'n'$	$= 0.277$
Mm	$= 76'',49$	$M'm'$	$= 593'',10$
Nn	$= 0\ ,03$	$N'n'$	$= 1\ ,89$
r	$= 76\ ,46$	r'	$= 591\ ,21$

$$\frac{1}{2}(\delta + \delta') = 36^\circ\ 45'\ 05'',95$$

$$\frac{1}{2}(r - r') = -\ 4\ \ 17\ ,38$$

$$\varphi = \mathbf{36\ 40\ 48{,}57.}$$

Este último cálculo ofrece la comodidad de dar la altura fácilmente, en la forma que sigue:

δ	$= 61^\circ\ 03'\ 06'',91$	δ'	$= 12^\circ\ 27'\ 04'',99$
φ	$= 36\ \ 40\ \ 48\ ,57$	φ	$= 36\ \ 40\ 48\ ,57$
$\delta - \varphi$	$= 24\ \ 22\ \ 18\ ,34$	$\delta' - \varphi$	$= -24\ 13\ 43\ ,58$
$90^\circ - (\delta - \varphi)$	$= 65\ \ 37\ \ 41\ ,66$	$90^\circ + (\delta' - \varphi)$	$= 65\ 46\ 16\ ,42$
r	$= 1\ \ 16\ ,46$	r'	$= 9\ 51\ ,21$
a	$= 65\ \ 36\ \ 25\ ,20$	a	$= 65\ \ 36\ \ 25\ ,21$

También puede ser de utilidad la fórmula diferencial (13), calculados sus coeficientes una vez por todas, al empezar la serie de observaciones de un par de estrellas elegidas para observarlas muchas noches, con valores aproximados y logaritmos de 5 cifras decimales, ya sea para el cálculo directo

de la latitud en las demás noches, ya como comprobación, si para el cálculo se prefiriera alguno de los procedimientos antedichos.

$$\left.\begin{aligned} d\,l = &\ 112{,}5\ K \cos \varphi_1 \cos \delta\ \sin 1''\,(h_1 + h_0)\,(h_1 - h_0) \\ &- 112{,}5\ K \cos \varphi_1 \cos \delta' \sin 1''\,(h'_1 + h'_0)\,(h'_1 - h'_0) \\ &- K \cos a_1 \cos p\ d\,\delta \\ &+ K \cos a_1 \cos p'\ d\,\delta' \\ K = &\ 0{,}5 \cos \varphi_1 \sec \frac{1}{2}(\delta + \delta') \operatorname{cosec} \frac{1}{2}(\delta - \delta') \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

$d\,l$ representa la corrección que hay que aplicar á la latitud calculada por la observación de la primera noche, para obtener la correspondiente á la observación de otra noche cualquiera.

h_0, h'_0 los horarios de la primera noche, expresados en segundos de tiempo.

h_1, h'_1 los mismos de la otra noche referida.

$d\delta$, $d\delta'$ las variaciones de las declinaciones aparentes de una á otra noche.

p, p' los ángulos paralácticos obtenidos por la fórmula $\sin p = \sin h_a \cos \varphi \sec a$.

EJEMPLO. Las estrellas o *Ursae Majoris* y α *Leonis*, á que se refiere el ejemplo anterior, se observaron para determinación de latitud todas las noches hábiles desde 14 de Febrero hasta 3 de Abril de 1900. La determinación de la primera noche fué

$$h_0 = 357^s{,}96 \qquad \varphi = 36^\circ\ 40'\ 48'',91$$
$$h'_0 = 745\ ,70 \qquad a = 65\ \ 36\ \ 39\ ,55.$$

Sigue el cálculo de la fórmula diferencial (13) para toda la temporada:

l. 0,5	= 9.69897	δ	= 61°03′ 05″
l. cos φ	= 9.90416	δ'	= 12 27 05
l. sec $\frac{1}{2}(\delta+\delta')$	= 0.09624	$\delta + \delta'$	= 73 30 10
l. cosec $\frac{1}{2}(\delta-\delta')$	= 0.38562	$\delta - \delta'$	= 48 36 00
	———	$\frac{1}{2}(\delta + \delta')$	= 36 45 05
l. K	= 0.08499	$\frac{1}{2}(\delta - \delta')$	= 24 18 00
l. sin h_0	= 8.41545	l. sin h'_0	= 8.73402
l. cos φ	= 9.90416	l. cos φ	= 9.90416
l. sec a	= 0.38413	l. sec a	= 0.38413
	———		———
l. sin p	= 8.70374	l. sin p'	= 9.022 31
p	= 177° 06′08″	p'	= 6° 02′34″
l. cos p	= 9.99944_n	l. cos p'	= 9.997 58
l. cos a	= 9.61587	l. cos a	= 9.615 87
l. K	= 0.08499	l. K	= 0.084 99
	———		———
— 0.5015	9.70030_n	+ 0.4994	9.698 44
l. 112,5	= 2.05115	l. 112, 5	= 2.051 15
l. K	= 0.08499	l. K	= 0.084 99
l. cos φ	= 9.90416	l. cos φ	= 9.904 16
l. cos δ	= 9.68486	l. cos δ'	= 9.989 66
l. sin 1″	= 4.68557	l. sin 1″	= 4.685 57
	———		———
+ 0.0002575	6.41073	+ 0.0005194	6.715 53

Por lo tanto, la fórmula diferencial para toda la serie de observaciones de estas dos estrellas es

$$\begin{aligned} d\,l = & + 0.0002575\,(h_1 + 357^s,96)\,(h_1 - 357^s,96) \\ & - 0.0005194\,(h'_1 + 745^s,70)\,(h'_1 - 745^s,70) \\ & + 0.5015\ d\,\delta \quad + 0.4994\ d\,\delta' \end{aligned}$$

Ejemplo. Aplicando esta fórmula á la observación de 1.° Marzo, ya referida en el ejemplo anterior, se tiene

$h_1 = 386^s,14$	$h'_1 = 754^s,98$
$\delta = 61^\circ\ 08'\ 06'',91$	$\delta' = 12^\circ\ 27'\ 04'',99$

y comparando con los valores del 14 de Febrero,

$h_1 + h_0 = 744^s,10$	$h'_1 + h'_0 = 1500^s,68$
$h_1 - h_0 = 28\ ,18$	$h'_1 - h'_0 = 9\ ,28$
$d\,\delta = +\ 3'',25$	$d\,\delta' = -\ 0'',27$

$$d\,l = +\ 5.399 - 7.234 + 1.630 - 0.135 = -\ 0'',34$$

$$\varphi = 36^\circ\ 40'\ 48'',91 - 0'',34 = 36^\circ\ 40'\ 48'',57.$$

Como se ve, descontado el trabajo del primer día, que es el cálculo de los coeficientes de la fórmula (13), resulta para todos los demás días la labor muy breve; y aunque se adopte otra forma de cálculo, siempre será ésta util para comprobación.

Variaciones en la refracción.—Como en el método anterior, hay que llevar cuenta con los cambios de refracción por variación de temperatura. Si en el comedio de las dos observaciones de la primera estrella se observa la temperatura τ_0, por medio del termómetro centígrado al aire libre, y en el comedio de las otras dos la temperatura τ_n, se tendrá la variación ρ de la refracción, expresada en segundos, por la fórmula (6), y se debe aplicar al horario observado de la segunda estrella la corrección

$$-\ \frac{\rho}{15 \cos\varphi \sin A''},$$

que en el ejemplo expuesto anteriormente para ilustración de este método, sería $-\,0{,}645\ \rho$. Algunos días el cambio de temperatura fué insignificante; pero en los más, mereció ser llevado en cuenta. El 2 de Abril, por ejemplo, se observó

$$\tau_0 = 16^\circ,7 \qquad , \qquad \tau_n = 15^\circ,1.$$

En la tabla que va al final de esta Memoria, se halla para $a = 65°,6$ y para las temperaturas observadas,

$$R = 26,4 \qquad F_o = 0,9746 \qquad F_n = 0,9800,$$

por consiguiente,

$$\rho = 0'',143,$$

y la corrección al horario de α Leonis es — $0^s,09$.

Elección de estrellas y cálculo previo.—Para alcanzar la mayor precisión en la latitud determinada por este método de las 4 observaciones, debe elegirse un par de estrellas que reunan las siguientes condiciones:

1.ª Magnitud no inferior á 4,0.

2.ª Ascensiones rectas que no difieran mucho entre sí, y que estén comprendidas en las horas sidéreas que se dedican á la observación.

3.ª Declinaciones cuya suma se aproxime al duplo de la latitud.

4.ª Altura á la culminación entre 34° y 76°.

Por ejemplo, si en Febrero de 1900 y en latitud aproximada 36° 41′ se quiere observar entre 8 y 18 horas sidéreas, se encuentran, entre otros, los pares siguientes de estrellas:

ESTRELLAS	Magnitud.	α y α′	δ y δ′	δ + δ′	a
ο *Ursae Majoris.*	3,4	8h 22m	61° 03′		
α *Leonis........*	1,9	10 03	12 27	73° 30′	66°
θ *Ursae Majoris.*	3,2	9 26	52 08		
δ *Leonis........*	2,8	11 09	21 04	73 12	74
β *Ursae Majoris.*	2,6	10 56	56 55		
θ *Leonis........*	3,5	11 09	15 59	72 54	69
α *Ursae Majoris.*	2,0	10 58	62 17		
ι *Leonis........*	3,8	11 18	11 05	73 22	64
γ *Ursae Majoris.*	2,6	11 48	54 15		
η *Bootis........*	2,9	13 49	18 54	73 09	72
ζ *Virginis......*	3,5	13 30	—0 05		
β *Ursae Minoris.*	2,1	14 50	74 33	74 28	52
β *Herculis......*	2,8	16 26	21 42		
γ *Draconis.....*	2,4	17 54	51 30	73 12	75
α *Ursae Majoris.*	2,0	10 58	62 17		
ε *Virginis......*	3,0	12 57	11 29	73 46	65

Elegido uno de estos pares, por ejemplo, ο *Ursae Majoris* y α *Leonis*, se procede á calcular aproximadamente las alturas de sus culminaciones, y se halla

65° 37′ 40″ para la de ο *Ursae Majoris*
y 65 46 20 para la de α *Leonis.*

Se adopta una altura algo más pequeña que las dos halladas para verificar en ella las 4 observaciones, como por ejemplo,

$$a_1 = 65° \; 36' \; 50'';$$

se calculan también aproximadamente los horarios y azimutes correspondientes, á saber,

$$h = 6^m \qquad A \begin{cases} 181^\circ & 45' \\ 178 & 15 \end{cases} \qquad A'' \begin{cases} 7^\circ & 25' \\ 352 & 35, \end{cases}$$
$$h' = 13$$

y con las ascensiones rectas más arriba anotadas y el estado absoluto del cronómetro + 1^h 30^m, respecto al tiempo sidéreo, en la noche del 24 de Febrero destinada á la primera observación, se forma anticipadamente el siguiente programa de aproximaciones, que sirva de guía para preparar oportunamente el instrumento. A la altura *a*, se le suma la refracción 26″; después se multiplica por 2 y, aplicando la rectificación del instrumento ÷ 3′ 22″ con signo contrario, se obtiene 131° 11′ 10″.

ESTRELLAS	HORA SIDÉREA	HORA CRONÓMETRO	AZIMUTES
o Ursae Majoris..	8^h 16^m	6^h 46^m	181° 45′
» »	8 28	6 58	178 15
α Leonis.........	9 50	8 20	352 35
» »	10 16	8 46	7 25

Graduación del instrumento = 131° 11′ 10″.

Error probable de observación.—Llamando, como en el método anterior, $d\,a$ al error probable en altura de una sola observación, y $d\,\varphi$ al originado en la latitud calculada, con motivo de los cuatro errores $d\,a$ correspondientes á las cuatro observaciones que se utilizan para cálculo de la latitud, se tiene

$$d\,\varphi = \pm \frac{1}{\cos A - \cos A''}\,d\,a, \qquad (14)$$

ó lo que es lo mismo,

$$d\,\varphi = \pm\, 0{,}5 \text{ cosec } \frac{1}{2}\,(A + A'') \text{ cosec } \frac{1}{2}\,(A - A'')\, d\, a,$$

que para el ejemplo anterior se convierte en

$$d\,\varphi = \pm\, 0.502\, d\, a.$$

Para hallar el valor de $d\,\varphi$ por este método, servirán los cuadros que siguen, referentes cada uno á un mismo sistema de estrellas observado varias noches.

I. Por 4 observaciones cada noche de β *Casiopeae* y γ *Pegasi.*

Año 1898.	Latitud obtenida.	v	$[v\,v]$
12 Octubre.	36° 47′ 36″,93	— 0″,08	0,0064
21 —	36 ,98	— 0 ,03	0,0009
22 —	36 ,75	— 0 ,26	0,0676
23 —	37 ,16	+ 0 ,15	0,0225
27 —	37 ,30	+ 0 ,29	0,0841
5 Noviembre.	36 ,98	— 0 ,03	0,0009
10 —	36 ,94	— 0 ,07	0,0049
15 —	37 ,17	+ 0 ,16	0,0256
17 —	36 ,87	— 0 ,14	0,0196
Sumas........	333 ,08	— 0 ,01	0,2325
Promedio.....	36 47 37 ,01		

El error probable de una observación aislada de latitud, según esta serie, es

$$0.6745 \sqrt{\frac{0.2325}{9 - 1}} = \pm\, 0'',11$$

y el de la latitud-promedio,

$$\pm \frac{0.11}{\sqrt{9}} = \pm 0'',04$$

II. Por 4 observaciones cada noche de *o Ursae Majoris* y *a Leonis.*

Año 1900.		Latitud obtenida.	v	[v v]
14	Febrero	36° 40′ 48″,92	+ 0,06	0,0036
24	—	49 ,10	+ 0,24	0,0576
27	—	48 ,87	+ 0,01	0,0001
1	Marzo	48 ,58	— 0,28	0,0784
3	—	48 ,40	— 0,46	0,2116
4	—	49 ,00	+ 0,14	0,0196
5	—	49 ,14	+ 0,28	0,0784
7	—	48 ,86	0,00	0,0000
8	—	49 ,15	+ 0,29	0,0841
9	—	49 ,19	+ 0,33	0,1089
11	—	49 ,25	+ 0,39	0,1521
12	—	49 ,16	+ 0,30	0,0900
13	—	49 ,06	+ 0,20	0,0400
14	—	48 ,54	— 0,32	0,1024
17	—	48 ,49	— 0,37	0,1369
18	—	48 ,99	+ 0,13	0,0169
22	—	48 ,46	— 0,40	0,1600
25	—	48 ,86	0,00	0,0000
28	—	48 ,48	— 0,38	0,1444
30	—	48 ,99	+ 0,13	0,0169
31	—	48 ,59	— 0,27	0,0729
2	Abril	48 ,95	+ 0,09	0,0081
3	—	48 ,77	— 0,09	0,0081
Sumas........		1123 ,80	+ 0,02	1,5910
Promedio.....		36 40 48 ,86		

El error probable de una observación aislada de latitud, según esta serie, es

$$0.6745 \sqrt{\frac{1.5910}{23 - 1}} = \pm 0'',18.$$

y el de la latitud-promedio

$$\pm \frac{0'',18}{\sqrt{23}} = \pm\ 0'',04.$$

III. Por 4 observaciones cada noche de *α Ursae Majoris* **y** *ι Leonis.*

Año 1900.		Latitud obtenida.	v	$[v\,v]$
2	Abril	36° 40′ 48″,07	+ 0″,03	0,0009
3	—	48 ,07	+ 0 ,03	0,0009
5	—	47 ,91	— 0 ,13	0,0169
6	—	48 ,18	+ 0 ,14	0,0196
8	—	47 ,94	— 0 ,10	0,0100
9	—	47 ,72	— 0 ,32	0,1024
14	—	48 ,11	+ 0 ,07	0,0049
15	—	48 ,07	+ 0 ,03	0,0009
16	—	47 ,97	— 0 ,07	0,0049
18	—	48 ,00	— 0 ,04	0,0016
19	—	48 ,17	+ 0 ,13	0,0169
20	—	47 ,72	— 0 ,32	0,1024
22	—	48 ,05	+ 0 ,01	0,0001
27	—	47 ,70	— 0 ,34	0,1156
29	—	48 ,33	+ 0 ,29	0,0841
30	—	48 ,19	+ 0 ,15	0,0225
2	Mayo	48 ,13	+ 0 ,09	0,0081
7	—	48 ,15	+ 0 ,11	0,0121
9	—	47 ,94	— 0 ,10	0,0100
10	—	48 ,09	+ 0 ,05	0,0025
11	—	48 ,03	— 0 ,01	0,0001
15	—	48 ,30	+ 0 ,26	0,0676
Sumas........		176 ,84	— 0 ,04	0,6050
Promedio.....		36 40 48 ,04		

El error probable de una observación aislada de latitud, según la última serie, es

$$0.6745\sqrt{\frac{0,6050}{22-1}} = \pm\ 0''11,$$

y el de la latitud-promedio,

$$\pm \frac{0'',114}{\sqrt{22}} = \pm 0'',02.$$

De suerte que en el promedio de los tres cuadros, se obtiene

$$d\,\varphi = \pm 0'',13,$$

como error probable de una observación aislada de latitud; y como para los tres casos el cálculo de la fórmula (14) da el mismo resultado, se deduce para $d\,a$ el valor siguiente:

$$d\,a = \pm d\,\varphi \frac{1}{0.502} = \pm 0'',26,$$

resultado bastante parecido al que se obtuvo por el método anterior de 3 observaciones.

El coeficiente de $d\,a$ en la fórmula (14) es la medida de la bondad del sistema de estrellas elegido para la observación. El límite inferior de este coeficiente es 0,5 y el superior es infinito: todo sistema de estrellas conjugadas con respecto al zenit y cuyos verticales de observación estén próximos al meridiano, dará siempre á este coeficiente un valor muy próximo al *mínimum*, y se prestará además á que las observaciones se practiquen con gran precisión. Inversamente, estrellas observadas en las proximidades del vertical primario darían un valor muy grande al coeficiente de $d\,a$.

CAPITULO IV

DETERMINACIÓN DE HORA

Al tratar aquí de los distintos métodos aplicables á determinación de hora por observaciones de precisión con el sextante, parece oportuno suprimir por muy conocido, y en obsequio de la brevedad, el de tri-apulsos correspondientes del sol, esto es, el método basado sobre las observaciones consecutivas y en una misma altura del limbo occidental, centro y limbo oriental de aquél astro, á uno y otro lado del meridiano.

Solamente se hará aquí mención de dos métodos para observación de noche, prácticos, sencillos y de mucha precisión, que se fundan en la observación de una sola estrella en altura conocida, ó en la de dos estrellas al llegar á igual altura. El primero se usa siempre que, para determinar la latitud según los métodos del capítulo anterior, se observan los pasos de las estrellas por un mismo almicantarat, pues entonces se agrega, á las observaciones necesarias para la latitud, otra en la misma altura de una estrella que se halle próxima al vertical primario, con el solo objeto de arreglar el cronómetro. Como por las primeras observaciones se determina, al par que la latitud, la altura, ésta sirve de dato exactísimo, para calcular el horario de la estrella agregada, por el método corriente, tan conocido y tan manoseado por los navegantes; y después, con el horario y la ascensión recta se halla la hora sidérea, que comparada con la de cronómetro observada, da el estado absoluto. Así se obtiene diariamente y con mucha exactitud el movimiento del cronómetro, que

tan necesario es para la reducción de todas las observaciones de precisión.

A primera vista, y á causa de lo acostumbrados que estamos á considerar como relativamente grosero y poco exacto el método de arreglar el cronómetro por una sola altura absoluta, tal vez sorprenda que aquí se le coloque en lugar preferente, tratándose de determinaciones de precisión, y se le llame exactísimo. Pero hay mucha diferencia entre valerse de la altura medida por un sextante, siempre plagado de errores; leída en todo caso con error, corregida con una rectificación que introduce otros tantos errores más, y por refracción también defectuosamente; y usar la altura exactísima obtenida por el cálculo de las observaciones de precisión, libre de todos los errores indicados y en la cual, como ya se ha visto, el error probable puede estimarse á lo sumo en $\pm$ 0'',3 lo que se traducirá al horario calculado por ella, tratándose de nuestras latitudes, en un error de $\pm$ 0^s,03, aparte del error propio de la observación agregada y del que introduzca la posición aparente de la estrella, tomada de las Efemérides.

Para poner de manifiesto el grado de precisión que se alcanza por este método, lo apliqué cierta noche, no una vez como siempre tenía por hábito, sino diez veces, observando diez estrellas distintas, aparte de las 4 observaciones cotidianas que servían para determinación de latitud y altura; con el objeto de calcular los diez estados absolutos, llevarlos todos á una misma hora, y por las diferencias entre unos y otros juzgar del grado de precisión de uno solo; todo ello en la forma que á continuación se expone:

En la noche del 3 de Marzo de 1900 se observaron en Jerez sobre el horizonte artificial, con el nuevo sextante y en una misma altura, las estrellas y á las horas de cronómetro que á continuación se expresan, siendo el movimiento horario del cronómetro con respecto al tiempo sidéreo + 9^s,738 en una hora de cronómetro, lo que equivale á + 9^s,712 en una hora sidérea.

ESTRELLAS	HORAS DE CRONÓMETRO	AZIMUT APROXIMADO	MAGNITUD
ο *Ursae Majoris.*	6^h $17^m 55^s$,5	181° 45′	3,4
ο *Ursae Majoris.*	6 31 51 ,0	178 15	»
α *Leonis*........	7 52 59 ,2	352 35	1,9
α *Leonis,*.......	8 18 23 ,3	7 25	»
γ *Geminorum*...	5 36 47 ,8	38 36	2,0
θ *Ursae Majoris.*	5 41 44 ,8	222 12	3,2
μ *Geminorum*...	5 52 05 ,4	61 00	3,2
β *Aurigae*......	5 57 29 ,2	119 24	2,0
ε *Leonis*........	6 05 12 ,6	293 12	3,2
δ *Geminorum*...	6 47 40 ,9	59 48	3,5
γ′ *Leonis,*.......	6 54 11 ,3	306 24	2,5
Castor........	7 27 37 ,5	87 54	1,9
Pollux,.......	7 31 02 ,5	77 42	1,2
δ *Leonis*........	7 45 14	303 54	2,7

Las temperaturas observadas al aire libre fueron

13°,5	á 5^h	24^m	del cronómetro
13 ,1	á 6	24	»
12 ,4	á 8	05	»

Las cuatro primeras observaciones, cuyos círculos verticales forman pequeños ángulos con el meridiano, fueron las destinadas á determinación de latitud y altura. Por ellas se halló

$$\varphi = 36° \ 40' \ 48'',40 \qquad\qquad a = 65° \ 36' \ 11'',11.$$

Esta altura se refiere á la hora comedio de las dos observaciones de ο *Ursae Majoris*, á la cual se redujo el horario observado en la otra estrella α *Leonis*, sustrayéndole, por razón de cambio de temperatura y consiguiente variación de refracción, 0^s,04.

Las diez observaciones del segundo grupo, cuyos círculos verticales forman grandes ángulos con el meridiano, son las adecuadas para determinación de estados absolutos, uno por

cada estrella observada, calculando cada horario por medio de su correspondiente declinación, la latitud del lugar 36° 40′ 49″,10 y la altura *a* antes calculada, después de corregirla para cada caso por variación de refracción, á causa de los cambios de temperatura.

Con auxilio de la fórmula (6) y de la tabla de refracción se deducen de los cambios de temperatura experimentados entre las $6^h\ 24^m$ del cronómetro y la hora de cada observación, los distintos valores de ρ correspondientes á las diez observaciones, y aplicándolos al valor de *a* se obtienen las alturas insertas en la primera columna del cuadro que sigue. A su lado van las declinaciones aparentes y en la tercera columna los horarios calculados.

ALTURAS			DECLINACIONES				HORARIOS			
65°	36′	11″,13	+ 16°	28′	59″,48		+ 1h	01m	48s	,96
		11 ,13	+ 52	07	50	,30	— 1	47	29	,02
		11 ,12	+ 22	33	51	,70	+ 1	32	10	,69
		11 ,12	+ 44	56	20	,46	+ 2	02	17	,69
		11 ,12	+ 24	13	50	,94	— 1	37	56	,96
		11 ,10	+ 22	09	53	,56	+ 1	30	40	,41
		11 ,10	+ 20	20	34	,42	— 1	23	07	,22
		11 ,08	+ 32	06	24	,84	+ 1	56	38	,99
		11 ,08	+ 28	15	58	,12	+ 1	49	05	,85
		11 ,08	+ 21	04	00	,00	— 1	26	15	,96

Estos horarios, sumados algebraicamente á las ascensiones rectas que van en primera columna del cuadro que sigue, producen las horas sidéreas de las distintas observaciones, incluidas en la segunda columna; y en la tercera van las diferencias entre dichas horas sidéreas y las horas de cronómetro, ó sean los estados absolutos con respecto al tiempo sidéreo, cada uno de los cuales corresponde al momento de cada observación.

ASCENSIONES RECTAS	HORAS SIDÉREAS	ESTADOS ABSOLUTOS
$6^h\ 31^m\ 58^s,49$	$7^h\ 33^m\ 47^s,45$	$1^h\ 56^m\ 59^s,65$
9 26 14 ,23	7 38 45 ,21	1 57 00 ,41
6 16 57 ,07	7 49 07 ,76	1 57 02 ,36
5 52 14 ,39	7 54 32 ,08	1 57 02 ,88
9 40 13 ,63	8 02 16 ,67	1 57 04 ,07
7 14 11 ,77	8 44 52 ,18	1 57 11 ,28
10 14 30 ,64	8 51 23 ,42	1 57 12 ,12
7 28 16 ,16	9 24 55 ,15	1 57 17 ,65
7 39 14 ,77	9 28 20 ,62	1 57 18 ,12
11 08 50 ,43	9 42 34 ,47	1 57 20 ,47

Cada estado absoluto de los contenidos en el cuadro anterior se refiere á la hora sidérea que tiene al lado. Para poderlos comparar entre sí, conviene reducirlos todos á una misma hora, aplicándoles la parte proporcional de movimiento durante el intervalo, á razón de $+\ 9^s,712$ por cada hora sidérea. La hora sidérea que se ha elegido para la reducción común es

$$10^h\ 45^m\ 15^s,75,$$

que corresponde á las doce horas de tiempo medio.

Los estados absolutos que resultan de esta reducción se ven en el cuadro que sigue, con su promedio, los desvíos del promedio y los cuadrados de estos desvíos.

Estados absolutos á media noche media del 3 de Marzo de 1900.

ESTRELLAS	ESTADOS ABSOLUTOS	v	$[v\ v]$
γ *Geminorum*...	$1^h\ 57^m\ 30^s,64$	+ 0,02	0,0004
θ *Ursae Majoris.*	30 ,60	— 0,02	0,0004
μ *Geminorum*...	30 ,87	+ 0,25	0,0625
β *Aurigae*......	30 ,52	— 0,10	0,0100
ε *Leonis*........	30 ,45	— 0,17	0,0289
δ *Geminorum*...	30 ,77	+ 0,15	0,0225
γ' *Leonis*.......	30 ,55	— 0,07	0,0049
Castor........	30 ,65	+ 0,03	0,0009
Pollux........	30 ,57	— 0,05	0,0025
δ *Leonis*........	30 ,61	— 0,01	0,0001
Sumas.....	306 ,23	+ 0,03	0,1331
Promedio..	1 57 30 ,62		

El error probable de una observación aislada de estado absoluto, según esta serie, es

$$0{,}6745\sqrt{\frac{0{,}1331}{10-1}} = \pm\ 0^s{,}08,$$

y el del promedio,

$$\pm\ \frac{0^s{,}08}{\sqrt{10}} = \pm\ 0^s{,}026.$$

Como se ve, el error probable de una determinación de estado absoluto por una sola estrella es $\pm\ 0^s{,}08$, esto es, un error tan pequeño que puede calificarse de igual categoría al que se obtendría con un anteojo meridiano, y hace, por lo tanto, el elogio del método y del instrumento. Es más notable su pequeñez si se considera que no son solamente los errores de observación y las irregularidades del cronómetro las que contribuyen á engrandecerlo, sino también los errores de ascensiones rectas y declinaciones. En otras varias noches repetí las mismas 14 observaciones con igual ó parecido éxito.

Al elegir una estrella conveniente para la determinación de estado absoluto, basta sujetarse á las condiciones de que su magnitud no baje de 4,0 y su azimut se aproxime á 90°, ó á 270°.

Por la observación de igual altura en dos estrellas.—Para este otro método ya no es necesario conocer la altura, como sucedía en el anterior, y basta la observación de las horas á que dos estrellas llegan á una misma altura, para determinar la hora con gran exactitud. Las fórmulas que sirven para el cálculo son las siguientes (15), que vienen á ser copia de las (1).

$$\left.\begin{aligned}(u'-u)-(\alpha'-\alpha) &= \lambda' \\ \sin\frac{1}{2}\lambda'\cot\frac{1}{2}(\delta-\delta') &= D'\sin B' \\ \cos\frac{1}{2}\lambda'\tan\mathrm{g}\frac{1}{2}(\delta+\delta') &= D'\cos B' \\ B'+\frac{1}{2}\lambda' &= C \\ \log\mathrm{tang}\,\varphi-\log D' &= \log\cos(h+C)\end{aligned}\right\}\quad(15)$$

Aplicándolas á las observaciones de γ *Geminorum* y θ *Ursae Majoris* del ejemplo anterior, se halla lo siguiente:

$$u'-u = 4^m 57^s + 0^s,80 = \quad 4^m\ 57^s,80$$
$$\alpha'-\alpha = \quad 2^h\ 54\ \ 15\ ,74$$
$$\lambda' = -\ 2\ \ 49\ \ 17\ ,94$$
$$\frac{1}{2}\lambda' = -\ 1\ \ 24\ \ 38\ ,97$$
$$= -\ 21^\circ\ 09'\ 44'',55$$

$\delta+\delta'$	=	68°36′49″,78	$\frac{1}{2}(\delta+\delta')$	=	34° 18′ 24″,89
$\delta-\delta'$	=	—35 38 50 ,82	$\frac{1}{2}(\delta-\delta')$	=	—17 49 25 ,41
l. sin $\frac{1}{2}\lambda'$	=	9.5575220_n	l. cos $\frac{1}{2}\lambda'$	=	9.9696773
l. cot $\frac{1}{2}(\delta-\delta')$	=	0.4927897_n	l. tan $\frac{1}{2}(\delta+\delta')$	=	9.8339948
l. (D' sin B')	=	0.0503117	l. (D' cos B')	=	9.8036721
l. sin B'	=	9.9395224	l. tang B'	=	0,2466396
l. D'	=	0.1107893	B'	=	60° 27′ 33″,71
l. tang φ	=	9.8720644	C	=	39 17 49 ,16
			$h+C$	=	54 45 03 ,35
l. cos $(h+C)$	=	9.7612751			
			h	=	15 27 14 ,19
horario de la estrella γ *Geminorum*				=	1ʰ 01ᵐ 48ˢ ,94
ascensión recta »				=	6 31 58 ,49
hora sidérea de la 1.ª observación				=	7 33 47 ,43
hora de cronómetro observada				=	5 36 47 ,8
estado absoluto á dicha hora				=	+1 56 59 ,63

Llevado este estado á la media noche media, ó sea á la hora sidérea $10^h\,45^m\,15^s,75$, por medio del movimiento horario en una hora sidérea $+9^s,712$, resulta

$$+1^h\,57^m\,30^s,62,$$

idéntico al hallado en el ejemplo anterior.

Para el análisis de este método sirve la fórmula diferencial que sigue, deducida de las generales de ambos triángulos de posición:

$$d\,a - d\,a' + (\cos A - \cos A')\,d\,\varphi + \cos\varphi\,(\sin A - \sin A')\,d\,h$$
$$-(\cos p \quad d\,\delta - \cos p' \quad d\,\delta') = 0.$$

Por ella se ve que, cuando las observaciones se hacen en el vertical primario y á uno y otro lado del meridiano, un error en la latitud no tiene influencia alguna en el horario resultante; los errores de observación $d\,a$, $d\,a'$ tienen la mínima influencia, porque su divisor alcanza el valor máximo $2\cos\varphi$, y lo mismo sucede con los errores de declinación, por igual motivo y porque además $\cos p$ y $\cos p'$ (para valores dados de φ y δ) tienen sus valores mínimos en el vertical primario. Para distintos valores de δ y δ' serán $\cos p$ y $\cos p'$ tanto menores cuanto más se aproximen las declinaciones á ser iguales á φ, ó lo que es lo mismo, cuando las estrellas corten al vertical primario en mayor altura; y como esta circunstancia es también favorable para disminuir las anomalías de la refracción, se deduce, en compendio, que las circunstancias más ventajosas para practicar este método, son las de *dos estrellas en el vertical primario, á uno y otro lado del meridiano, en gran altura y con pequeño intervalo de una á otra observación*.

En el método anterior de determinar el horario por una sola observación, se vió que el error probable era $\pm\,0^s,08$.

Por consiguiente, en éste de dos observaciones, elegidas en las circunstancias antedichas, el error probable debe ser

$$\pm \frac{0^s,08}{\sqrt{2}} = \pm 0^s,06.$$

Un caso particular de este método es la observación de dos alturas correspondientes de una misma estrella, que proporciona la ventaja de mayor sencillez en el cálculo, ya que el horario se obtiene inmediatamente, por ser igual á la mitad del tiempo sidéreo transcurrido entre ambas observaciones. Con los sextantes de Troughton y análogos no podía emplearse este método en sus circunstancias más favorables, que exigen una altura próxima á 90°, para que el intervalo entre las observaciones sea pequeño, y dichos sextantes no alcanzan á medir alturas dobles de astros elevados más de 70° sobre el horizonte; pero con el sextante nuevo, y con todos los del sistema de Pistor & Martins, toda clase de alturas dobles se puede medir. Son convenientes para este caso en nuestro hemisferio las estrellas cuya declinación es poco menor que la latitud del lugar, porque, culminando algo al Sur del zenit, tienen sus pasos por el vertical primario muy próximos al meridiano y reunen todas las condiciones de exactitud, poco intervalo, salvedad de los errores de refracción y brevedad extrema de cálculo.

Á cualquier hora de la noche puede tenerse determinación de estado absoluto, porque siempre es fácil encontrar una ó dos estrellas adecuadas para esta determinación.

CONCLUSION

Con lo expuesto anteriormente queda manifiesto el éxito del nuevo sextante, que realiza ampliamente todas las esperanzas concebidas antes de su construcción.

Mucho sorprendieron por su pequeñez los errores probables de las determinaciones de latitud practicadas con sextantes comunes y publicadas en 1895 y 1896; pero si se comparan con los correspondientes al nuevo sextante, se verá que son cinco veces mayores que éstos, es decir, que una sola determinación de latitud con el nuevo sextante, alcanza por sí sola tan alto grado de precisión, como el promedio de 25 determinaciones, por el mismo sistema de estrellas observadas con un sextante común, lo que abarcaría próximamente un período de cuarenta días. ¡Economía grande de tiempo y de trabajo, que convierte en fácil y hacedero lo que antes pudiera abandonarse por prolijo y dilatado!

Es tan elevado este grado de precisión, que no lo supera nada de lo que hoy se admite como mejor en Astronomía esférica para determinación de latitud, como son los grandes anteojos zenitales de observatorio (fijo ó temporal), aplicados al método más exacto que se conoce actualmente (el de Talcott ó de Horrebow) y dirigidos por astrónomos eminentes de Alemania y de los Estados Unidos en recientes trabajos, donde con el mayor esmero han procurado el perfeccionamiento del método antedicho. Y hablo solamente de este método porque todos los demás, incluso el de medición de distancias zenitales y el de pasos por el vertical primario, han quedado arrinconados y en olvido, como cosa vieja é inútil.

Chauvenet, en su *Tratado de Astronomía* ya citado, después de hallar para un ejemplo de 73 determinaciones de la-

titud por el método de Talcott, el error probable de determinación

$$e = \pm\ 0'',30,$$

dice lo siguiente:

«Este pequeño error probable es una prueba, no solamente de *la gran superioridad del método sobre todos los previamente conocidos*, sino también de la habilidad del observador. Es posible que un estado extraordinariamente favorable de la atmósfera haya contribuído á dar á esta serie un grado de precisión poco común, pues la práctica de los observadores del Coast Survey da como promedio un valor algo mayor á e. El valor adoptado por el Survey es

$$e = \pm\ 0'',50,$$

y aun este valor nos da la razón cuando aseguramos que los resultados de este método admiten favorable comparación con los obtenidos por instrumentos de primera clase, fijos de observatorio, en los que las mediciones dependen de círculos graduados.»

Esto lo publicó Chauvenet en 1868. Después, los astrónomos y los constructores han perfeccionado el método y los instrumentos, y por consiguiente, ha disminuído aquel error probable e. En las últimas determinaciones que, para el estudio de las variaciones de la latitud, han practicado en Rockville, Waikiki (Honolulu) y Potsdam, se ha logrado llegar á errores probables de $\pm\ 0'',20$, $\pm\ 0'',18$, y hasta $\pm\ 0'',12$. De suerte que, con todos los mejores elementos, y al cabo de largos años de perfeccionamiento, han llegado á donde llegó el nuevo sextante desde sus primeros pasos, con anteojo pequeñito en comparación á los que aquellos usan, y dirigido además por inexperto observador. Agréguese que aquellos otros instrumentos necesitan de un observatorio, fijo ó volante, donde guarecerlos de la intemperie durante toda la temporada de las observaciones, mientras que al sextante le basta su caja entre una y otra noche y un li-

gero abrigo á su pie, si no se quiere retirar del campo. Además el transporte de aquellos es difícil y á algunos puntos casi imposible, mientras que el sextante puede ser fácilmente conducido á todas partes.

Si en el terreno de la exactitud ha respondido el nuevo sextante, y con creces, á lo que de él se esperaba, igualmente lo ha hecho en facilidad de manejo, comodidad de la observación, distinción de las imágenes y del retículo que sirve de guía para la observación, y aumento del número de estrellas observables, que viene á ser el cuádruplo que con los sextantes comunes. Convendría mucho que este número fuese aun mayor para encontrar siempre combinación de estrellas perfectamente adecuadas á cada observación; pero sería preciso para ello aumentar aun más las dimensiones del anteojo.

Algunos defectos se han encontrado en el nuevo instrumento, como debía esperarse en obra nueva, y cuando el que lleva la idea está muy distante de los constructores para poder vigilar la realización de su proyecto. Afortunadamente, estos defectos no son esenciales, ni perjudican en nada á la buena observación. Los fabricantes se ciñeron demasiado á la letra del precepto general que se les impuso de que procuraran invariabilidad, sin preocuparse por el recargo de peso; pero la invariabilidad recomendada se refería solo al instrumento propiamente dicho, y no á su pie, que para nada la necesita y cuyo peso podría haberse reducido á la tercera parte del que hoy tiene. Otro defecto más importante tiene este pie, y es lo corto del eje *V A*, fig. II, que debiera ser de longitud suficiente para que, atornillado el instrumento en *A* de modo que el eje del anteojo quede vertical, caiga la prolongación de este eje fuera del círculo de los tornillo-pies. Tal como lo han hecho suele ocurrir que alguna observación exige la colocación del horizonte artificial precisamente en el lugar que ocupa uno de los tornillo-pies, y para obviar este inconveniente he tenido que recurrir á labrar un arco de puente en una piedra, de modo que, reposando ésta sobre

el pavimento solamente por tres puntos extremos, quede hueco suficiente debajo para el tornillo-pie y el brazo correspondiente, sin que sea posible contacto alguno. La cara superior de la piedra se labró perfectamente plana para que sirviera de asiento al horizonte artificial.

El tornillo *T* del movimiento lento en azimut, queda muy distante del ocular para ciertas posiciones del anteojo, y como el observador necesita tener la vista en el ocular y la mano en el tornillo á un mismo tiempo, y ésto no puede lograrlo cuando la altura es grande, convendría remediar también este inconveniente.

Como se vé, todos estos defectos atañen exclusivamente al pie, no afectan á la observación y podrían fácilmente subsanarse, cuando se intentara construir otro instrumento. Quizás fuera útil agregar al pie un pequeño círculo azimutal que permitiera leer de 5 en 5 minutos, para guía de la colocación previa del plano del instrumento en el vertical del astro que se intente observar, pues resultaría mucho más exacta dicha guía que la de las rayas azimutales del piso, y se evitaría el trazado y conservación de éstas.

Como ya se ha indicado, el actual sextante puede ser utilísimo é irreemplazable para determinar con facilidad, precisión y prontitud, las latitudes astronómicas de todos los vértices de una red geodésica de primer orden, así como las de puntos importantes de una exploración, ó de aquellos que por servir accidentalmente de estación á una expedición astronómica, interese conocer su situación geográfica con gran precisión.

También se ha comprobado que la determinación de hora por el nuevo sextante resulta muy exacta, y es de presumir que la combinación de estas observaciones con las de señales ópticas entre los vértices de la misma red geodésica, pudiera proporcionar fácilmente diferencias de longitud astronómica con la exactitud necesaria para el cálculo de los desvíos completos de la plomada en dichos vértices.

Algunas otras aplicaciones útiles tiene el sextante, y se in-

dicaron en la Memoria publicada en 1895. Y otras más eminentes tendría, como por ejemplo, la determinación de ascensiones rectas y declinaciones, si algún día se le dedicara á instrumento de observatorio, adaptándolo á anteojo de mayores dimensiones. Podría adaptarse á los mismos instrumentos altazimutales y anteojos zenitales hoy en uso, dotando á unos y otros de un apéndice hacia el objetivo del anteojo que, formando cuerpo invariable con éste, soportara prisma, espejo central, pequeño limbo y alidada. Es de calcular que tal instrumento alcanzaría aun mayor precisión, y podría utilizarse en observaciones de estrellas de 5.ª y 6.ª magnitud, adonde el actual sextante no puede llegar, abriendo así nuevo y vasto campo de observación, donde el fecundo principio de los instrumentos de reflexión pudiera prestar interesantes servicios.

Mas sin llegar á tanto el nuevo sextante de la presente Memoria (por más que ya haya dejado perfectamente expedito el camino con su brillante comportamiento y preciosísimas cualidades) es bastante para justificar plenamente aquellas palabras de Sánchez Cerquero y otras de Chauvenet que copio á continuación, y aun mucho más allá de lo que aquellos autores jamás pudieron imaginar.

«La conformidad que tienen los resultados de las observaciones parciales entre sí... *debiera llamar fuertemente la atención de los astrónomos hacia los instrumentos de reflexión*..... Nada tiene, pues, de extraño la conformidad que presentan en la práctica los resultados obtenidos en varias noches, y que á primera vista parece casual, maravillosa y aun increible á todo el que no haya hecho la experiencia por sí mismo..... Si á todo lo dicho se agrega que el uso del sextante está libre de la continua y embarazosa atención al nivel durante toda la serie de observaciones, su menor costo y mayor facilidad en su transporte, me parece que los jueces competentes se sentirán cuando menos inclinados á dulcificar la sentencia de proscripción, tácitamente pronunciada contra el sextante, casi siempre que se trata de observacio-

nes que piden exactitud. En apoyo de cuanto llevo dicho habla fuertemente la experiencia, verdadera piedra de toque de todas las teorías y reflexiones».

«*The precision of the results obtained with the sextant is often surprising*».

Si estos respetables autores tanto se maravillaban y sorprendían al ver como el sextante común llegaba por el promedio de una serie de 25 observaciones á deducir una latitud con un error probable ¡de 3''! ¿Qué no dirían hoy al contemplar que el nuevo sextante y los verdaderos métodos de precisión reducen el actual error probable á *la centésima parte de aquel* que tanto les cautivó, mediante igual serie de 25 observaciones?

Parece que estaban inspirados de espíritu profético al cantar unas alabanzas que entonces no se veían muy justificadas, como también el que escribe la presente Memoria, al encariñarse hace más de nueve lustros con esta clase de instrumentos, cuando ni soñaba en conocer las actuales excelentes cualidades que más adelante ha ido descubriendo, y que cada día lo hacen más ferviente admirador y amigo del sextante de reflexión; primer instrumento de ciencias que tomó en sus inexpertas manos de muchacho, y último que pugnarán por sostener las trémulas de su ancianidad.

LAUS DEO

Tabla de refracción deducida de la fórmula de Bessel.

Refracción astronómica media para 752 milímetros del barómetro y 10° del termómetro centígrado.		Factor para las correcciones de la refracción media por variaciones de temperatura.	
Altura verdadera	Refracción media	Temperatura al aire libre.	Factor F.
34°	85″	— 15°	1,0937
35	82	— 14	1,0895
36	79	— 13	1,0853
37	76	— 12	1,0812
38	74	— 11	1,0771
39	71	— 10	1,0730
40	68	— 9	1,0690
41	66	— 8	1,0650
42	64	— 7	1,0610
43	62	— 6	1,0570
44	60	— 5	1,0531
45	58	— 4	1,0492
46	56	— 3	1,0453
47	54	— 2	1,0415
48	52	— 1	1,0377
49	50	0	1,0339
50	48	+ 1	1,0302
51	47	2	1,0264
52	45	3	1,0227
53	43	4	1,0191
54	42	5	1,0154
55	40	6	1,0118
56	39	7	1,0082
57	37	8	1,0046
58	36	9	1,0011
59	35	10	0,9976
60	33	11	0,9941
61	32	12	0,9906
62	31	13	0,9871
63	29	14	0,9837
64	28	15	0,9803
65	27	16	0,9769
66	26	17	0,9736
67	24	18	0,9703
68	23	19	0,9670
69	22	20	0,9637
70	21	21	0,9604
71	20	22	0,9572
72	19	23	0,9540
73	18	24	0,9507
74	17	25	0,9476
75	16	30	0,9320
76	14	35	0,9170

INDICE

